Université Blaise Pascal, U.F.R. Sciences et Technologies, Département de Mathématiques et Informatique

Licence de mathématique, deuxième année, S3, U.E. 21MM31, année 2016-2017

CALCUL INTEGRAL ET SERIES

Notes de cours de François DUMAS

Table des matières

Ces notes sont destinées aux étudiants comme support à leur travail personnel. Il ne s'agit pas d'un "cours" parfaitement finalisé, dans sa conception comme dans sa rédaction. Je suis par avance reconnaissant à celles et ceux qui me signaleront les erreurs, manques, imperfections, coquilles,... qu'il contient immanquablement. Je remercie Monique Chicourrat, Christoph Kriegler et François Martin pour leur relecture et leurs nombreuses remarques.

version du 15 décembre 2016 Francois.Dumas@univ-bpclermont.fr

Chapitre 1

Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

1.1 Définition et premières propriétés

1.1.1 Notion de primitive

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I toute fonction $F : I \to \mathbb{R}$ qui est dérivable sur I et telle que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.

Par exemple :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;

(ii) une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = \cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ est la fonction F définie par $F(x) = \sin x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;

(iii) une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ est la fonction F définie par $F(x) = \ln x$ pour tout $x \in]0, +\infty[$;

(iv) une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle elle-même.

Proposition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, admettant une primitive F sur I. Alors, une autre fonction $G : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f si et seulement s'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $G(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in I$.

Démonstration. Par hypothèse, il existe $F : I \to \mathbb{R}$ vérifiant $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.
Supposons d'abord que $G : I \to \mathbb{R}$ est donnée par $G(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in I$. Il est clair que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme somme de la fonction F qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la fonction constante égale à k qui l'est aussi). Pour tout $x \in I$, on a $G'(x) = F'(x)$ puisque la dérivée d'une fonction constante est nulle, c'est-à-dire $G'(x) = f(x)$. Ceci prouve que G est une primitive de f sur I.

Réciproquement, supposons que G est une primitive de f sur I. Pour tout $x \in I$, on a $G'(x) = f(x) = F'(x)$ donc, par linéarité de la dérivation, $(G-F)'(x) = 0$. Ceci prouve que la fonction $G - F$ est constante sur l'intervalle I, donc qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $G(x) - F(x) = k$ pour tout $x \in I$. $\square$

Corollaire. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, admettant des primitives sur I. Pour tout $a \in I$ et tout $m \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive $F : I \to \mathbb{R}$ de f sur I telle que $F(a) = m$.

Démonstration. Soit G une primitive quelconque de f sur I. Posons $k = m - G(a) \in \mathbb{R}$, et notons $F : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x) = G(x) + k$ pour tout $x \in I$. D'après la proposition précédente, F est une primitive de f sur I. De plus elle vérifie $F(a) = G(a) + k = m$.

Pour l'unicité, considérons une primitive H de f telle que $H(a) = m$. D'après la proposition précédente, il existe $k' \in \mathbb{R}$ tel que $H(x) = F(x) + k'$ pour tout $x \in I$. En particulier $m = H(a) = F(a) + k' = m + k'$, donc $k' = 0$, d'où $H = F$. $\square$

1.1.2 Existence de primitives

Théorème. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue sur I, alors f admet des primitives sur I.

Démonstration. Admis, conformément au programme[1]. $\square$

1.1.3 Quelques exemples importants (à connaître)

f	I	F
e^x	$\mathbb{R}$	$e^x + k$
$\frac{1}{x}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$\ln\lvert x\rvert + k$
$\ln x$	$]0, +\infty[$	$x \ln x - x + k$

f	I	F
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x + k$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x + k$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\arctan x + k$

Démonstration. Il suffit de calculer la dérivée sur I de la fonction F donnée pour vérifier que l'on retrouve bien la fonction f correspondante, qui est continue sur l'intervalle I considéré. $\square$

1.1.4 Le cas des fonctions puissances (à connaître)

Pour tout réel $a \neq -1$, c'est une seule et même formule qui donne les primitives de la fonction f définie par $f(x) = x^a$, à savoir :

f	I	F
x^a	dépend de a	$\frac{1}{a+1}\, x^{a+1} + k$

1. Il n'est pas dans l'esprit de ce cours d'insister au-delà du théorème admis ci-dessus sur les conditions (nécessaires, suffisantes) pour qu'une fonction admette des primitives. Mentionnons simplement pour mémoire que : (1) il existe des fonctions qui n'admettent pas de primitives sur un intervalle donné, comme par exemple la fonction partie entière sur $\mathbb{R}$ (évidemment elles ne sont pas continues sur cet intervalle) ; (2) il existe des fonctions qui admettent des primitives sur un intervalle donné sans pour autant être continues sur cet intervalle.

mais le point crucial est que l'intervalle I sur lequel la fonction f est définie (et continue), ainsi que la façon même dont x^a est défini, dépendent du a choisi. Donnons quelques précisions.

a	$f(x) = x^a$	I	F
$a = n \ \ (n \in \mathbb{N})$	$x^n = x \times x \times \cdots \times x$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$
$a = -n \ \ (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$	$\frac{1}{x^n}$	$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$\frac{1}{(1-n)x^{n-1}} + k$
$a = \frac{1}{2}$	$\sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + k$
$a = -\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$2\sqrt{x} + k$
a quelconque, $a \neq -1$	$\mathrm{e}^{a \ln x}$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{a+1}e^{(a+1)\ln x} + k$

En résumé, il n'y a qu'une formule à connaître, mais le plus important est de savoir quel sens lui donner suivant le choix de a. Quant au cas où $a = -1$, il est de nature complètement différente puisqu'une primitive de f est dans ce cas le logarithme néperien.

1.1.5 D'autres exemples classiques

f	I	F
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$	$\tan x + k$
$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh} x + k$
$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch} x + k$
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{th} x + k$
$\frac{1}{1-x^2}$	$]\infty, -1[$ ou $]-1, 1[$ ou $]1, +\infty[$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{x+1}{x-1}\right\rvert + k$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\mathbb{R}$	$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + k$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$	$\arcsin x + k$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$]\infty, -1[$ ou $]1, +\infty[$	$\ln\left\lvert x + \sqrt{x^2-1}\right\rvert + k$

1.2 Méthodes de calcul

1.2.1 Linéarité

Proposition. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que f admet sur I une primitive F et que g admet sur I une primitive G. Alors, pour tous réels λ, μ, la fonction $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$ sur I.

Démonstration. Par hypothèse, F et G sont dérivables sur I et vérifient $F'(x) = f(x)$ et $G'(x) = g(x)$ pour tout $x \in I$. La linéarité de la dérivation implique alors que la fonction $\lambda F + \mu G$ est dérivable sur I et vérifie $(\lambda F + \mu G)'(x) = \lambda F'(x) + \mu G'(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$ pour tout $x \in I$. □

Par exemple : toute fonction polynôme admet des primitives sur $\mathbb{R}$, car c'est une combinaison linéaire de fonctions puissances à exposants entiers naturels.

1.2.2 Changement de variable

Proposition. Soient $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle J de $\mathbb{R}$, admettant sur J une primitive G. Soit $u : I \to J$ une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors une primitive sur I de la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = g(u(x)) \times u'(x)$ est la fonction $F = G \circ u$.

Rappelons tout d'abord que $G \circ u$ est l'application $I \to \mathbb{R}$ définie par $(G \circ u)(x) = G(u(x))$ pour tout $x \in I$.

Démonstration. La fonction $F = G \circ u$ est dérivable sur I en tant que composée de deux fonctions dérivables, et l'on a pour tout $x \in I$:

$$F'(x) = (G \circ u)'(x) = G'(u(x)) \times u'(x) = g(u(x)) \times u'(x) = f(x)$$

ce qui prouve que F est une primitive de f sur I. $\square$

▶ *Par exemple :*

fonction f	*intervalle I*	*primitive F*	*indication : choix de u et g*
$f(x) = \frac{\ln x}{x}$,	$I =]0, +\infty[$,	$F(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + k$,	$\leftarrow\ u(x) = \ln x,\ \ g(y) = y$
$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$,	$I =]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$,	$F(x) = \ln \lvert \ln x \rvert + k$,	$\leftarrow\ u(x) = \ln x,\ \ g(y) = \frac{1}{y}$
$f(x) = \tan x$,	$I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,	$F(x) = -\ln \lvert \cos x \rvert + k$,	$\leftarrow\ u(x) = \cos x,\ \ g(y) = -\frac{1}{y}$
$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$,	$I = \mathbb{R}$,	$F(x) = \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + k$,	$\leftarrow\ u(x) = 1 + x^2,\ \ g(y) = \frac{1}{2y}$
$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,	$I = \mathbb{R}$,	$F(x) = \sqrt{1 + x^2} + k$,	$\leftarrow\ u(x) = 1 + x^2,\ \ g(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$
$f(x) = \frac{x}{1+x^4}$,	$I = \mathbb{R}$,	$F(x) = \frac{1}{2}\arctan x^2 + k$,	$\leftarrow\ u(x) = x^2,\ \ g(y) = \frac{1}{2(1+y^2)}$
$f(x) = \cos^3 x$,	$I = \mathbb{R}$,	$F(x) = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + k$,	$\leftarrow\ u(x) = \sin x,\ \ g(y) = 1 - y^2$

▶ *Sur le plan pratique :* la méthode de changement de variable peut s'appliquer lorsque la fonction f dont on cherche à calculer une primitive peut être mise sous la forme $f = (g \circ u) \times u'$, où u est une fonction dérivable et g une fonction dont on connaît une primitive (sur des intervalles convenables). Parmi les situations les plus courantes, on peut citer :

si f est de la forme $u'u^n$,	alors $F = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + k$,
si f est de la forme $-\frac{u'}{u^2}$,	alors $F = \frac{1}{u} + k$,
si f est de la forme $\frac{u'}{\sqrt{u}}$,	alors $F = 2\sqrt{u} + k$,
si f est de la forme $\frac{u'}{u}$,	alors $F = \ln \lvert u \rvert + k$,
si f est de la forme $u'e^u$,	alors $F = e^u + k$,
si f est de la forme $\frac{u'}{1+u^2}$,	alors $F = \arctan u + k$,

1.2.3 Primitivation par parties

Proposition. Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On suppose que la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = u(x)v'(x)$ admet une primitive G sur I. Alors la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = u'(x)v(x)$ admet pour primitive sur I la fonction F définie par $F(x) = u(x)v(x) - G(x)$ pour tout $x \in I$.

$$\Big[\text{ primitive de } u'v \ \Big] = uv - \Big[\text{ primitive de } uv' \ \Big]$$

Démonstration. La fonction $H = uv$ est dérivable sur I en tant que produit de deux fonctions dérivables, et l'on a pour tout $x \in I$:

$$H'(x) = (uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = f(x) + g(x) = f(x) + G'(x),$$

d'où $f(x) = H'(x) - G'(x)$, ce qui par linéarité prouve que $H - G$ est une primitive de f sur l'intervalle I. □

► *Sur le plan pratique :* la méthode de primitivation par parties peut s'appliquer lorsque la fonction f dont on cherche à calculer une primitive peut être mise sous la forme $f = u' \times v$, où u et v sont deux fonctions dérivables telles que l'on connaisse une primitive (sur l'intervalle considéré) de la fonction $g = u \times v'$.

► *Par exemple :*

fonction f	*intervalle I*	*primitive F*	*indication : choix de u et v*
$f(x) = x \sin x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = \sin x - x \cos x + k$	$\leftarrow u(x) = -\cos x,\ v(x) = x$
$f(x) = x\mathrm{e}^x$	$I = \mathbb{R}$	$F(x) = (x-1)\mathrm{e}^x + k$	$\leftarrow u(x) = \mathrm{e}^x,\ v(x) = x$
$f(x) = \ln x$	$I =]0, +\infty[$	$F(x) = x \ln x - x + k$	$\leftarrow u(x) = x,\ v(x) = \ln x$
$f(x) = x \ln x$	$I =]0, +\infty[$	$F(x) = \frac{x^2}{4}(2 \ln x - 1) + k$	$\leftarrow u(x) = \frac{1}{2}x^2,\ v(x) = \ln x$
$f(x) = (\ln x)^2$	$I =]0, +\infty[$	$F(x) = x((\ln x)^2 - 2 \ln x + 2) + k$	$\leftarrow u(x) = x,\ v(x) = (\ln x)^2$

► *Remarque :* il est assez fréquent qu'un calcul de primitive nécessite d'appliquer plusieurs fois de suite une primitivation par parties. Comme sur l'exemple suivant :

> On veut calculer une primitive F de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-2x} \cos x$.
>
> Pour calculer F, on fait une première primitivation par parties en prenant $u(x) = \sin x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-2x}$. On obtient : $F(x) = \mathrm{e}^{-2x} \sin x + 2G(x)$, où G est une primitive de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \mathrm{e}^{-2x} \sin x$.
>
> Pour calculer G, on fait une seconde primitivation par parties en prenant $u(x) = -\cos x$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-2x}$. On obtient : $G(x) = -\mathrm{e}^{-2x} \cos x - 2F(x)$.
>
> On conclut en combinant les deux relations que : $F(x) = \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-2x}(\sin x - 2 \cos x) + k$.

1.3 Quelques compléments

Les quelques outils élémentaires exposés ci-dessus (des primitives usuelles à connaître, la linéarité, le changement de variable et la primitivation par parties) suffisent déjà, en les combinant de façon pertinente, à calculer des primitives pour de larges familles de fonctions continues. Sans chercher la virtuosité technique gratuite, il est indispensable de s'entraîner sur de nombreux exemples. Conformément au programme, on donne pour finir quelques indications (très partielles) sur des situations classiques simples. De nombreux autres exemples seront vus en travaux dirigés et dans le chapitre suivant.

1.3.1 Cas des produits d'un polynôme par une exponentielle

► *Exemple 1.* On veut calculer une primitive $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x^2 \mathrm{e}^{3x}$$

Une première primitivation par parties avec $u(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$ et $v(x) = x^2$ donne :

$$F(x) = \frac{1}{3}x^2\mathrm{e}^{3x} - G(x)$$

où $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une primitive de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{2}{3}x\mathrm{e}^{3x}$. Une seconde primitivation par parties avec $u(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x}$ et $v(x) = \frac{2}{3}x$ donne :

$$G(x) = \frac{2}{9}x\mathrm{e}^{3x} - \frac{2}{27}\mathrm{e}^{3x}.$$

On conclut que : $F(x) = (\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}x + \frac{2}{27})\mathrm{e}^{3x} + k$.

► *Principe général.* La méthode de primitivation par parties successives que l'on vient d'employer s'applique de façon analogue à toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme $f(x) = x^n\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, puis par linéarité à toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme $f(x) = p_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec p_n une fonction polynomiale. On pourra retenir :

> *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de la forme $f(x) = p_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et p_n une fonction polynomiale de degré n, alors f admet une primitive $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forme $F(x) = q_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ avec q_n une fonction polynomiale de degré n.*

Il est généralement beaucoup plus rapide de déterminer q_n en identifiant $(q_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x})'$ avec $p_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$ que de faire les primitivations par parties.

► *Exemple 2.* On veut calculer une primitive $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = (x^2 - 5x + 7)\mathrm{e}^{-x}.$$

On cherche une primitive F sous la forme $F(x) = (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^{-x}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. On calcule :

$$F'(x) = (2ax + b)\mathrm{e}^{-x} - (ax^2 + bx + c)\mathrm{e}^{-x} = [-ax^2 + (2a - b)x + (b - c)]\mathrm{e}^{-x},$$

que l'on identifie à $f(x)$, d'où $-a = 1$, $2a - b = -5$ et $b - c = 7$. Donc $a = -1$, $b = 3$ et $c = -4$. On conclut que les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$F(x) + k = (-x^2 + 3x - 4)\mathrm{e}^{-x} + k.$$

1.3.2 Cas des polynômes trigonométriques

▶ *Exemple 1.* On veut calculer une primitive $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \sin^3 x \cos^2 x.$$

On observe d'abord que $f(x) = \sin^2 x \cos^2 x \sin x = (1-\cos^2 x)\cos^2 x \sin x$. Ainsi par changement de variable avec $u(x) = \cos x$, on reconnaît que $f = -u'(u^2 - u^4)$. Donc, d'après 1.2.2, une primitive de f est $F = G \circ u$ avec G une primitive de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = -x^2 + x^4$. On peut choisir $G(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$. On conclut que :

$$F(x) = -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + \tfrac{1}{5}\cos^5 x + k.$$

▶ *Exemple 2.* On veut calculer une primitive $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \cos^5 x$$

On observe d'abord que $f(x) = \cos^4 x \cos x = (1 - \sin^2 x)^2 \cos x$. Ainsi par changement de variable avec $u(x) = \sin x$, on reconnaît que $f = u'(1 - u^2)^2 = u'(1 - 2u^2 + u^4)$. Donc, d'après 1.2.2, une primitive de f est $F = G \circ u$ avec G une primitive de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1 - 2x^2 + x^4$. On peut choisir $G(x) = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$. On conclut que :

$$F(x) = \sin x - \tfrac{2}{3}\sin^3 x + \tfrac{1}{5}\sin^5 x + k.$$

▶ *Principe général.* Un polynôme trigonométrique est une somme finie de fonctions de la forme $\sin^m x \cos^n x$ avec $m, n \in \mathbb{N}$. Pour calculer une primitive d'un polynôme trigonométrique, on se ramène donc par linéarité au calcul d'une primitive sur $\mathbb{R}$ d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin^m x \cos^n x$ avec $m, n \in \mathbb{N}$.

> *Si m est impair, le changement de variable $u(x) = \cos x$ conduit à un polynôme en $\cos x$. De même si n est impair, le changement de variable $u(x) = \sin x$ conduit à un polynôme en $\sin x$. Les situations où m et n sont tous les deux pairs nécessitent d'utiliser les formules usuelles de trigonométries, comme sur les exemples suivants.*

▶ *Exemple 3.* On veut calculer une primitive $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \sin^2 x \cos^4 x$$

On calcule $f(x) = (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2 2x \times \frac{1}{2}(1+\cos 2x) = \frac{1}{16}(1-\cos 4x)(1+\cos 2x)$. On développe en $f(x) = \frac{1}{16}(1+\cos 2x - \cos 4x - \cos 2x \cos 4x)$. Or $\cos 2x \cos 4x = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x)$. D'où $f(x) = \frac{1}{16}(1 + \frac{1}{2}\cos 2x - \cos 4x - \frac{1}{2}\cos 6x)$. On conclut par changements de variables :

$$F(x) = \tfrac{1}{16}(1 + \tfrac{1}{4}\sin 2x - \tfrac{1}{4}\sin 4x - \tfrac{1}{12}\sin 6x) + k.$$

▶ *Exemple 4.* On veut calculer une primitive $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \cos^6 x$$

On calcule $f(x) = (\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}))^6 = \frac{1}{2^6}[(\mathrm{e}^{6ix} + \mathrm{e}^{-6ix}) + 6(\mathrm{e}^{4ix} + \mathrm{e}^{-4ix}) + 15(\mathrm{e}^{2ix} + \mathrm{e}^{-2ix}) + 20]$. Donc $f(x) = \frac{1}{2^6}(2\cos 6x + 12\cos 4x + 30\cos 2x + 20) = \frac{1}{2^5}(\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10)$. On conclut que :

$$F(x) = \tfrac{1}{2^5}(\tfrac{1}{6}\sin 6x + \tfrac{3}{2}\sin 4x + \tfrac{15}{2}\sin 2x + 10x) + k$$

1.3.3 Cas des fractions rationnelles

▶ *Exemple 1.* On veut calculer une primitive F d'une fonction f de la forme :

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ c \neq 0.$$

On calcule : $f(x) = \frac{a}{c}\left(\frac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}}\right) = \frac{a}{c}\left(\frac{x+\frac{d}{c}-\frac{d}{c}+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}}\right) = \frac{a}{c}\left(1+\frac{-\frac{d}{c}+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}}\right) = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)}$.

On conclut qu'une primitive de f sur $\left]-\infty, -\frac{d}{c}\right[$ et sur $\left]-\frac{d}{c}, +\infty\right[$ est la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{a}{c}\,x + \frac{bc-ad}{c^2}\ln\left|x+\frac{d}{c}\right|.$$

▶ *Exemple 2.* On veut calculer une primitive F d'une fonction f de la forme :

$$f(x) = \frac{1}{ax^2+bx+c} \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

• Si ax^2+bx+c admet deux racines réelles distinctes $r_1 < r_2$, alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) = \frac{\lambda}{x-r_1} + \frac{\mu}{x-r_2}, \quad \text{et donc} \quad F(x) = \lambda \ln|x-r_1| + \mu \ln|x-r_2| + k,$$

sur chacun des trois intervalles $]-\infty, r_1[$, $]r_1, r_2[$ et $]r_2, +\infty[$.

• Si ax^2+bx+c admet dans $\mathbb{R}$ une racine double r, alors

$$f(x) = \frac{1}{a(x-r)^2}, \quad \text{et donc} \quad F(x) = \frac{-1}{a(x-r)} + k,$$

sur chacun des deux intervalles $]-\infty, r[$ et $]r, +\infty[$.

• Si ax^2+bx+c n'admet aucune racine réelle, il existe deux réels $\alpha = \frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a}$ tels que $ax^2+bx+c = a[(x+\alpha)^2+\beta^2]$ (forme canonique du trinôme). On obtient :

$$f(x) = \frac{1}{a\beta^2[(\frac{x+\alpha}{\beta})^2+1]}, \quad \text{et donc} \quad F(x) = \frac{1}{a\beta}\arctan\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right) + k, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

▶ *Exemple 3.* On veut calculer une primitive F d'une fonction f de la forme :

$$f(x) = \frac{cx+d}{x^2+px+q} \quad \text{avec } c, d, p, q \in \mathbb{R} \text{ tels que } p^2-4q < 0.$$

L'idée est de faire apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur en écrivant $cx+d = \frac{c}{2}(2x+p) + d - \frac{cp}{2}$, de sorte que

$$f(x) = \frac{c}{2} \times \frac{2x+p}{x^2+px+q} + \left(d - \frac{cp}{2}\right) \times \frac{1}{x^2+px+q},$$

ce qui par changement de variable pour le premier terme, et en utilisant pour le second terme le troisième cas de l'exemple précédent, donne pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \frac{c}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{1}{\beta}\left(d-\frac{cp}{2}\right).\arctan\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right) + k, \quad \text{avec } \alpha = \frac{p}{2},\ \beta = \frac{\sqrt{-p^2+4q}}{2}.$$

▶ *Principe général.* Une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes. Un théorème important (dit de décomposition en éléments simples) montre qu'une fraction rationnelle s'écrit de façon unique comme la somme :

1. d'un polynôme (sa partie entière) ; le calcul d'une primitive de cette partie est évident.
2. d'une somme finie de termes de la forme $\dfrac{c}{(x-a)^n}$, avec $a, c \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

   les primitives des fonctions de ce type sont de la forme $\begin{cases} \dfrac{c}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + k & \text{si } n > 1, \\ c \ln |x-a| + k & \text{si } n = 1. \end{cases}$

   sur chacun des intervalles $]-\infty, a[$ et $]a, +\infty[$.
3. d'une somme finie de termes de la forme $\dfrac{cx+d}{(x^2+px+q)^m}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$, $c, d, p, q \in \mathbb{R}$ tels que $p^2 - 4q < 0$. Les primitives des fonctions de ce type peuvent être plus délicates à calculer. On a traité aux exemples 2 et 3 le cas où $m = 1$. On verra d'autres exemples sur des cas particuliers.

▶ *Exemple 4.* On veut calculer une primitive F de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x+3}{x(x-1)^3}.$$

On vérifie d'abord que $f(x) = \frac{3}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x-1)^3} - \frac{3}{x}$, d'où :

$$F(x) = 3\ln|x-1| + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} - 3\ln|x| + k = 3\ln\left|1 - \frac{1}{x}\right| + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} + k,$$

sur chacun des trois intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

▶ *Exemple 5.* On veut calculer une primitive F de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}.$$

On décompose en $f = f_1 - f_2$ avec $f_1(x) = \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1}$ et $f_2(x) = \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$.
- Une primitive de f_1 est $F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F_1(x) = \arctan x$.
- Pour déterminer une primitive F_2 de f_2, on procède par parties avec $u = -\frac{1}{2(x^2+1)}$ et $v = x$, de sorte que $F_2(x) = -\frac{x}{2(x^2+1)} - G_2(x)$, avec G_2 primitive de la fonction $uv' = u$ donc ici $G_2 = -\frac{1}{2}F_1$.
On conclut qu'une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(x^2+1)} + k.$$

▶ *Exemple 6.* On veut calculer une primitive F de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)^2}.$$

On écrit le trinôme x^2+x+1 sous forme canonique $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right]$.
Donc $f(x) = \frac{16}{9} \times \frac{1}{\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right]^2}$, de sorte que le changement de variable $u(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ conduit à :
$F(x) = \frac{8}{3\sqrt{3}}.G(u(x))$ où G est une primitive de la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{(x^2+1)^2}$.
On utilise les primitives de g trouvées à l'exemple précédent pour conclure que :

$$F(x) = \frac{4}{3\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{3}.\frac{2x+1}{x^2+x+1} + k.$$

Chapitre 2

Intégrale d'une fonction continue sur un segment

2.1 Définition et méthodes de calcul

2.1.1 Intégrale et primitives

Définition. Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On appelle intégrale de f sur $[a, b]$, ou encore intégrale de a à b de f, notée $\int_a^b f(t)\,dt$, le nombre réel :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur $[a, b]$.

► *Remarques sur cette définition :*

(i) l'hypothèse de continuité de f assure l'existence de primitives (d'après le théorème 1.1.2) ;

(ii) la valeur de l'intégrale ne dépend pas du choix de la primitive F puisque deux primitives diffèrent d'une constante (d'après la proposition 1.1.1) ;

(iii) on a de façon évidente $\int_a^a f(t)\,dt = 0$ et $\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$;

(iv) on note usuellement : $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$.

► *Remarque sur cette notation :* dans la notation $\int_a^b f(t)\,dt$, la variable t est muette, au sens où l'on peut tout aussi bien écrire $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du = \dots$

Proposition (relation de Chasles). Soient a, b, c trois réels tels que $a \leq c \leq b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On a :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur $[a, b]$.
On a : $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = F(b) - F(c) + F(c) - F(a) = \int_c^b f(t)\,dt + \int_a^c f(t)\,dt.$ □

Par définition même, les notions d'intégrale et de primitive sont intimement liées. Elles ne doivent cependant pas être confondues : les primitives de f sont des *fonctions* $[a, b] \to \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est un *nombre réel*. On peut expliciter encore le lien entre les deux notions par la formulation suivante, évidente mais fondamentale, qui précise le corollaire de 1.1.1 :

Théorème (fondamental). Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. L'application $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{pour tout } x \in [a, b]$$

est l'unique primitive de f s'annulant en a.

Démonstration. Soit G une primitive quelconque de f sur $[a, b]$. Par définition de l'intégrale, on a : $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = G(x) - G(a)$ pour tout $x \in [a, b]$. Ainsi F et G différent d'une constante, et donc F est une primitive de f. Cette primitive vérifie $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$.

Réciproquement, soit H une primitive de f sur $[a, b]$ s'annulant en a. Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que $H(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in [a, b]$. Puisque qu'on a à la fois $H(a) = 0$ (par hypothèse sur H) et $F(a) = 0$ (d'après le point précédent), on conclut que $k = 0$, donc $H = F$, ce qui montre l'unicité voulue. □

► *Calcul des intégrales.* Les liens essentiels entre intégrales et primitives impliquent que l'on retrouve pour le calcul des intégrales les mêmes méthodes et arguments que ceux que l'on a exposés pour les primitives en 1.2 ; cela fait l'objet de la section 2.2. Auparavant on précise les relations de l'intégrale avec une autre notion importante, celle d'aire d'une surface du plan [1].

2.1.2 Intégrale et aire

► *Notations.*

Soit f une fonction $[a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$. On fixe un repère du plan. Pour tout $x \in [a, b]$, on note $M(x)$ le point de coordonnées $(x, f(x))$ et $P(x)$ le point de coordonnées $(x, 0)$ qui est situé sur l'axe des abscisses. La courbe de f est l'ensemble de tous les points $M(x)$ quand x décrit $[a, b]$.

► *Première approche : cas d'une fonction positive croissante.*

On suppose $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, positive et croissante sur $[a, b]$. Pour tout $x \in [a, b]$, on note $A(x)$ l'aire de la portion de plan située entre la courbe de f et l'axe des abscisses, et limitée par les droites verticales passant par $P(a)$ et $P(x)$.

Pour tout réel $h \geq 0$, $A(x + h) - A(x)$ est l'aire de la bande de largeur h limitée par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites verticales passant par $P(x)$ et $P(x + h)$. Donc :

$P(x)M(x) \times h \leq A(x + h) - A(x) \leq P(x + h)M(x + h) \times h$

Comme $P(x)M(x) = f(x)$ et $P(x + h)M(x + h) = f(x + h)$, on déduit que :

1. Nous ne donnons pas dans ces notes de définition formalisée de cette notion.

$$f(x) \;\leq\; \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \;\leq\; f(x+h).$$

La continuité de f implique que $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, donc $\lim\limits_{h\to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} = f(x)$. la double inégalité ci-dessus. En raisonnant de même à gauche, on déduit que la fonction $A : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dérivable en tout $x \in [a,b]$, et que sa dérivée A' est la fonction f. En d'autres termes :

$$A \text{ est une primitive de } f \text{ sur } [a,b].$$

Il est clair que $A(a) = 0$; donc A est la primitive de f s'annulant en a, c'est-à-dire la fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ d'après le théorème fondamental 2.1.1.
En particulier $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) = A(b)$ est l'aire de la portion de plan située entre la courbe de f et l'axe des abscisses, et limitée par les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.

Le théorème suivant étend ce résultat au cas où f n'est pas nécessairement croissante.

Théorème.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive sur $[a,b]$.
L'intégrale :

$$\int_a^b f(t)\,dt$$

est égale à l'aire de la portion de plan située entre la courbe de f et l'axe des abscisses, et limitée par les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.

Démonstration. On reprend le même raisonnement que dans la situation particulière préliminaire en remplaçant la double inégalité centrale par :

$$m_h \;\leq\; \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \;\leq\; M_h,$$

où M_h est le maximum et m_h le minimum de f sur le segment $[x, x+h]$, qui, par continuité de f, existent et vérifient $\lim\limits_{h\to 0} M_h = \lim\limits_{h\to 0} m_h = f(x)$. On conclut de la même manière. □

► *Généralisation.*

Pour une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et négative sur $[a,b]$, $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) = -A(b)$ est l'opposée de l'aire de la portion de plan située entre la courbe de f et l'axe des abscisses, et limitée par les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$ (il suffit de considérer la fonction $-f$, qui est continue et positive sur $[a,b]$).

S'il existe $c \in [a,b]$ tel que f est positive sur $[a,c]$ et négative sur $[c,b]$, alors la relation de Chasles vue en 2.1.1 implique que$\int_a^b f(t)\,dt = A - A'$, avec :

✓ A l'aire de la portion de plan située entre la courbe de f et l'axe des abscisses, limitée par la droite verticale d'équation $x = a$ et le point $C(c, 0)$,

✓ A' l'aire de la portion de plan située entre la courbe de f et l'axe des abscisses, limitée par le point C et la droite verticale d'équation $x = b$.

Ce raisonnement se généralise immédiatement à un nombre fini de points où f change de signe.

2.2 Méthodes de calculs

2.2.1 Linéarité

Proposition. Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Pour tous réels λ et μ, on a :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\, dt = \lambda \int_a^b f(t)\, dt + \mu \int_a^b g(t)\, dt.$$

Démonstration. Soient F une primitive de f et G une primitive de g sur $[a, b]$. D'après la proposition 1.2.1, la fonction $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$. Donc en appliquant la définition 2.1.1, on obtient directement : $\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\, dt = (\lambda F + \mu G)(b) - (\lambda F + \mu G)(a) = \lambda(F(b) - F(a)) + \mu(G(b) - G(a)) = \lambda \int_a^b f(t)\, dt + \mu \int_a^b g(t)\, dt$. $\square$

2.2.2 Changement de variable

Proposition. Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Soit u une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[\alpha, \beta]$ tel que $u([\alpha, \beta]) \subseteq [a, b]$. Alors :

$$\int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)\, dt.$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur $[a, b]$. Comme on l'a vu à la proposition 1.2.2, l'application $G = F \circ u$ est une primitive de $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(u(x)) \times u'(x)$. Donc : $\int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)\, dt = \int_\alpha^\beta g(t)\, dt = G(\beta) - G(\alpha) = F(u(\beta)) - F(u(\alpha)) = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)\, dx$. $\square$

► *Premier type d'exemple.* $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\, dt = \sqrt{2} - 1.$

En effet : considérons $u : [0, 1] \to [1, 2]$ définie par $u(t) = t^2 + 1$. Elle est de classe C^1 et vérifie $u'(t) = 2t$. Donc :

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\, dt = \int_0^1 \frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}}\, dt = \int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \left[\,\sqrt{x}\,\right]_1^2 = \sqrt{2} - 1.$$

NB : il est commode d'utiliser les notations simplifiées : $t^2 + 1 = x$ et $2t\, dt = dx$.

► *Second type d'exemple.* $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$

En effet : considérons $u : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ définie par $u(t) = \sin t$. Elle est de classe C^1 et vérifie $u'(t) = \cos t$. Donc :

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\, \cos t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1}{2}(\cos 2t + 1)\, dt,$$

d'où : $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\, dx = \left[\, \tfrac{1}{4}\sin 2t + \tfrac{1}{2}\, t \,\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{\pi}{2}.$

NB : il est commode d'utiliser les notations simplifiées : $x = \sin t$ et $dx = \cos t\, dt$

Corollaire.

(i) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ admettant une période T. Alors :
$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

(ii) Soit f une fonction continue sur un segment $[-a, a]$ avec $a > 0$. Si f est paire, alors :
$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt.$$

(ii) Soit f une fonction continue sur un segment $[-a, a]$ avec $a > 0$. Si f est impaire, alors :
$$\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0.$$

Démonstration. Pour (i), on calcule $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_a^T f(t)\,dt + \int_T^{a+T} f(t)\,dt$ par la relation de Chasles. Par changement de variable, on déduit $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_a^T f(t)\,dt + \int_0^a f(t+T)\,dt$; puis par périodicité $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_a^T f(t)\,dt + \int_0^a f(t)\,dt$. D'où le résultat en réappliquant la relation de Chasles. Les points (ii) et (iii) résultent du changement de variables $u(t) = -t$. □

Fonction paire	Fonction impaire	Fonction périodique

2.2.3 Intégration par parties

Proposition. Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle $[a, b]$. Alors :
$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = \big[\, u(t)v(t) \,\big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt.$$
avec la convention de notations $\big[\, u(t)v(t) \,\big]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

Démonstration. On applique directement la proposition 1.2.3 et la définition 2.1.1. □

► *Exemple.* Calcul de $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-2x} \cos x\,dx$.

En utilisant les notations commodes déjà introduites dans les exemples de 2.2.2, on fait une première intégration par parties avec :
$$u'(x) = \cos x \quad \text{et} \quad v(x) = \mathrm{e}^{-2x}, \quad \text{d'où} \quad u(x) = \sin x \quad \text{et} \quad v'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}.$$
Il vient : $I = \big[\, \mathrm{e}^{-2x} \sin x \,\big]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-2x} \sin x\,dx = \mathrm{e}^{-\pi} + 2J$, avec $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-2x} \sin x\,dx$.

On calcule J par une autre intégration par parties, avec :

$$w'(x) = \sin x \;\text{ et }\; v(x) = \mathrm{e}^{-2x}, \quad \text{d'où} \quad w(x) = -\cos x \;\text{ et }\; v'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}.$$

Il vient : $J = \left[-\mathrm{e}^{-2x}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-2x}\cos x\,dx = 1 - 2I$.

En résumé : $I = \mathrm{e}^{-\pi} + 2J = \mathrm{e}^{-\pi} + 2(1-2I)$, et donc : $I = \frac{1}{5}(\mathrm{e}^{-\pi}+2)$.

► *Exemple.* Calcul de $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ (intégrales de Wallis) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Observons d'abord que l'égalité des deux expressions s'obtient par le changement de variables $t = \frac{\pi}{2} - x$. On calcule ensuite I_n par récurrence sur n. Il est évident que :

$$I_0 = \tfrac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_1 = 1.$$

Puis pour $n \geq 2$, on fait une intégration par partie de $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$ avec :

$u'(x) = \sin x$ et $v(x) = \sin^{n-1} x$, d'où $u(x) = -\cos x$ et $v'(x) = (n-1)\sin^{n-2}x\cos x$.

Il vient : $I_n = \left[-\sin^{n-1}x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2}x)(1-\sin^2 x)\,dx = (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

On conclut que $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$, et on achève par récurrence suivant la parité de n :

$$I_{2p} = \tfrac{(2p)\,!}{2^{2p}\,(p\,!)^2}\cdot\tfrac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \tfrac{2^{2p}\,(p\,!)^2}{(2p+1)\,!} \qquad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}.$$

2.2.4 Exemple d'application : formule de Taylor avec reste intégral

Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction que l'on suppose de classe C^{n+1} sur $[a,b]$. Alors pour tout $x \in [a,b]$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n\,!}(x-t)^n\,dt$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n. Pour $n = 0$, on prend f de classe C^1 sur $[a,b]$. La fonction f' admet f pour primitive sur $[a,b]$ donc, d'après la définition 2.1.1, $\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$. Ainsi $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$, ce qui est la formule voulue pour $n = 0$.

Soit $n \geq 0$; supposons (hypothèse de récurrence) la propriété vraie au rang n et prenons $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+2}. Fixons un réel $x \in [a,b]$ quelconque. Une intégration par parties avec :

$$u(t) = -\tfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)\,!}, \quad v(t) = f^{(n+1)}(t), \quad u'(t) = \tfrac{(x-t)^n}{n\,!}, \quad v'(t) = f^{(n+2)}(t),$$

donne :

$$\int_a^x \tfrac{(x-t)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \left[-\tfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)\,!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x - \int_a^x \left(-\tfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)\,!}\right) f^{(n+2)}(t)\,dt,$$

ou encore :

$$\int_a^x \tfrac{f^{(n+1)}(t)}{n\,!}(x-t)^n\,dt = \tfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)\,!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \tfrac{f^{(n+2)}(t)}{(n+1)\,!}(x-t)^{n+1}\,dt.$$

En substituant cette expression dans le dernier terme de l'hypothèse de récurrence $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n\,!}(x-t)^n\,dt$, on obtient la relation voulue à l'ordre $n+1$. □

► *Commentaire.* On peut comprendre cette formule comme un résultat d'approximation permettant d'écrire toute fonction f de classe C^{n+1} sous la forme d'un polynôme de degré $\leq n$ et d'un reste, exprimé comme une intégrale. On reviendra sur ce point plus loin en 3.2.1.

2.3 Propriétés de l'intégrale

2.3.1 Positivité

Théorème. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On suppose que f est positive sur $[a, b]$. Alors :

(i) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geq 0.$

(ii) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$ si et seulement si f est identiquement nulle sur $[a, b]$.

Démonstration. Soit F une primitive de f sur $[a, b]$. Comme $F' = f$ est supposée positive, la fonction F est croissante. Donc $a < b$ implique $F(a) \leq F(b)$. D'où $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \geq 0$. Pour (ii), supposons maintenant que $\int_a^b f(t)\,dt = 0$, c'est-à-dire que $F(a) = F(b)$. Comme F est croissante, les conditions $a < b$ et $F(a) = F(b)$ implique que F est constante, et donc que sa dérivée f est identiquement nulle sur $[a, b]$. L'implication réciproque est évidente. □

Corollaire. Soit f et g deux fonctions $[a, b] \to \mathbb{R}$ continues sur le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

$$\text{Si } f(x) \leq g(x) \text{ pour tout } x \in [a, b], \text{ alors } \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition précédente à la fonction $h = g - f$ qui est continue et positive sur $[a, b]$. □

Corollaire. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. alors :

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Démonstration. Notons $I = \int_a^b f(t)\,dt$. Considérons la fonction $g = |f|$, qui est continue sur $[a, b]$. Elle vérifie $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, donc $I \leq \int_a^b g(t)\,dt$ en appliquant le corollaire précédent. On a aussi $-g(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, donc $-\int_a^b g(t)\,dt \leq I$. La double inégalité $-\int_a^b g(t)\,dt \leq I \leq \int_a^b g(t)\,dt$ équivaut à $|I| \leq \int_a^b g(t)\,dt$. □

Corollaire *(inégalité des accroissements finis)*. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Soient m le minimum et M le maximum de f' sur $[a, b]$. Alors on a :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

Démonstration. Rappelons d'abord que l'existence de m et M résulte de la continuité de la fonction f' sur le segment $[a, b]$. On a : $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$, d'où l'on déduit que $m(b - a) = \int_a^b m\,dt \leq \int_a^b f'(t)\,dt \leq \int_a^b M\,dt = (b - a)M$ d'après le premier corollaire ci-dessus. C'est le l'encadrement voulu puisque $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$ d'après la définition 2.1.1. □

2.3.2 Formule de la moyenne

Proposition. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. On note $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Alors :

(i) on a les inégalités $m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leq M(b-a)$;

(ii) il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

Démonstration. Il suffit pour démontrer (i) d'appliquer le troisième corollaire de 2.3.1 à une primitive F de f sur $[a, b]$.

Pour (ii), notons $k = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$. D'après la point (i), on a $m \leq k \leq M$. Comme f est continue sur $[a, b]$, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires et conclure qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$. □

2.3.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition. Soient f et g deux fonctions $[a, b] \to \mathbb{R}$ continues sur le segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$. Alors :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,dt} \times \sqrt{\int_a^b g(t)^2\,dt}.$$

Démonstration. Convenons de noter $\beta(u, v) = \int_a^b u(t)v(t)\,dt$ quelles que soient u, v deux fonctions continues sur $[a, b]$. Remarquons que d'après le théorème 2.3.1, on a toujours $\beta(u, u) \geq 0$, et $\beta(u, u) > 0$ si u n'est pas la fonction identiquement nulle.

Avec cette notation, démontrer la proposition équivaut à vérifier que :

$$\beta(f, g)^2 \leq \beta(f, f) \times \beta(g, g).$$

Pour cela, prenons un réel λ quelconque et calculons :

$$\beta(\lambda f + g, \lambda f + g) = \int_a^b [\,\lambda f(t) + g(t)\,]^2\,dt = \int_a^b [\;\lambda^2 f(t)^2 + 2\lambda f(t)g(t) + g(t)^2\;]\,dt$$

En utilisant la linéarité de l'intégrale (proposition 2.2.1), il vient :

$$\beta(\lambda f + g, \lambda f + g) = \lambda^2\int_a^b f(t)^2\,dt + 2\lambda\int_a^b f(t)g(t)\,dt + \int_a^b g(t)^2\,dt,$$

que l'on réécrit sous la forme $\beta(\lambda f + g, \lambda f + g) = \lambda^2\beta(f, f) + 2\lambda\beta(f, g) + \beta(g, g)$. On en déduit :

$$\beta(f, f)\,\lambda^2 + 2\beta(f, g)\,\lambda + \beta(g, g) \geq 0 \;\text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si f est identiquement nulle, la proposition est claire (les deux membres de l'inégalité étant nuls). Sinon, on a $\beta(f, f) \neq 0$, et donc dire que le trinôme $\beta(f, f)\,\lambda^2 + 2\beta(f, g)\,\lambda + \beta(g, g)$ est positif pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ implique que son discriminant est négatif. En d'autres termes, $\beta(f, g)^2 - \beta(f, f)\beta(g, g) \leq 0$, ce qui montre l'inégalité voulue. □

2.4 Quelques compléments

2.4.1 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Définition. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux sur $[a, b]$ lorsqu'il existe un nombre fini de réels $a_0, a_1, \dots a_n$ vérifiant

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b,$$

tels que pour tout $0 \leq i \leq n-1$:

- f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$,
- f admet une limite à droite en a_i,
- f admet une limite à gauche en a_{i+1}.

Sous les conditions ci-dessus, considérons pour tout $0 \leq i \leq n-1$ la restriction f_i de f à l'intervalle $]a_i, a_{i+1}[$. Par hypothèse f_i est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$. On peut la prolonger par continuité à droite en a_i et par continuité à gauche en a_{i+1} en posant

$$f_i(a_i) = \lim_{x \to a_i^+} f(x) \quad \text{et} \quad f_i(a_{i+1}) = \lim_{x \to a_{i+1}^-} f(x).$$

On obtient ainsi une fonction continue sur $[a_i, a_{i+1}]$, que l'on notera encore f_i. La définition 2.1.1 peut donc s'appliquer à f_i et l'on peut considérer $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(t)\,dt$. Conformément à la relation de Chasles, on définit :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i(t)\,dt \right).$$

En résumé : l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ se ramène à une somme finie d'intégrales de fonctions continues sur des segments (formant une subdivision de $[a, b]$) auxquelles s'applique tout ce qui a été développé dans les sections précédentes.

2.4.2 Approximation d'une intégrale par la méthode des rectangles

Considérons un segment $[a, b]$ avec $a < b$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on le subdivise en n segments $[a_i, a_{i+1}]$ de même longueur $\frac{1}{n}(b-a)$ en posant :

$$a_i = \tfrac{1}{n}(ib + (n-i)a) \quad \text{pour tout } 0 \leq i \leq n,$$

qui vérifient donc : $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$.

On fixe une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que l'on suppose de classe C^1. La fonction continue f' admet donc sur $[a, b]$ un maximum M_1. Pour simplifier, supposons f positive sur $[a, b]$.

Sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, introduisons la fonction constante g_i constante égale à $f(a_i)$ sur $[a_i, a_{i+1}]$. Il est clair que $\int_{a_i}^{a_{i+1}} g_i(t)\,dt = \frac{b-a}{n} f(a_i)$.
La différence

$$\Delta_n = \left| \int_a^b f(t)\,dt - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(a_i) \right|$$

mesure l'écart entre l'aire de la surface comprise entre la courbe de f et l'axe des abscisses, et la somme des aires des rectangles ainsi construits, ceci entre les deux droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$.

Lorsque n tend vers l'infini, le nombre de points de la subdivision tend vers l'infini et la largeur de chaque rectangle tend vers 0. Il apparaît intuitivement que la somme des aires des rectangles tend alors vers l'intégrale de f. On démontre effectivement que :

$$\lim_{n \to +\infty} \Delta_n = 0.$$

Démonstration. On donne ici la preuve à titre d'exercice.

Puisque f est de classe C^1, on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$:

$$\text{pour tout } x \in [a_i, a_{i+1}]\,,\ |f(x) - f(a_i)| \leq (x - a_i) M_1,$$

d'où avec le premier corollaire de 2.3.1 :

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(x) - f(a_i)|\, dx \leq M_1 \int_{a_i}^{a_{i+1}} (x - a_i)\, dx = M_1 \left[\frac{(x - a_i)^2}{2} \right]_{a_i}^{a_{i+1}} = M_1 \, \frac{(b-a)^2}{2n^2}.$$

Par ailleurs, on décompose avec la relation de Chasles $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\, dx$, d'où :

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\, dx - \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i) \right| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\, dx - \frac{b-a}{n} f(a_i) \right) \right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\, dx - \frac{b-a}{n} f(a_i) \right| = \sum_{i=0}^{n-1} \left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} (f(x) - f(a_i))\, dx \right| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(x) - f(a_i)|\, dx \right) \leq \sum_{i=0}^{n-1} M_1 \, \frac{(b-a)^2}{2n^2} = M_1 \, \frac{(b-a)^2}{2n}
\end{aligned}$$

Il résulte de cette majoration que $\lim_{n \to +\infty} \Delta_n = 0$. □

2.4.3 Approximation d'une intégrale par la méthode des trapèzes

On peut considérer à la place de chacun des rectangles précédents le trapèze obtenu en joignant les points de coordonnées $(a_i, f(a_i))$ et $(a_{i+1}, f(a_{i+1})))$.

L'aire d'un tel trapèze est :

$$\tfrac{1}{2}(f(a_i) + f(a_{i+1})) \times \tfrac{b-a}{n}.$$

La différence d'aire devient :

$$\Delta'_n = \left| \int_a^b f(t)\, dt - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{2n} (f(a_i) + f(a_{i+1})) \right|.$$

En supposant f de classe C^2 et en notant M_2 le maximum de f'' sur $[a, b]$, on peut démontrer que la majoration précédente $\Delta_n \leq \frac{(b-a)^2}{2n} M_1$ est améliorée en :

$$\Delta'_n \leq \tfrac{(b-a)^3}{12n^2} M_2.$$

Chapitre 3

Rappels et compléments sur le comparaison locale des fonctions

Lors de l'étude de la limite d'une fonction f en un point a, ou en $+\infty$ ou $-\infty$, on a déjà rencontré des situations où l'application des règles sur les opérations (somme, produit, composition) ne permet pas directement de conclure du fait d'une "forme indéterminée", comme $\infty \times 0$, ou $\frac{\infty}{\infty}$, ou $(-\infty) + (+\infty)$. C'est un recours plus fin à des techniques de dérivation qui permet parfois de "lever l'indétermination", comme pour les limites classiques suivantes, qu'il faut connaître :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{pour } \alpha, \beta, \gamma > 0 : \quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{\gamma x}}{x^\alpha} = +\infty, \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha |\ln(x)|^\beta = 0, \\ \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1, \quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}). \end{array}}$$

Le but de ce chapitre (qui reprend pour partie et complète ce qui a été vu en première année sur la question) est de systématiser ces techniques.

3.1 Fonctions équivalentes, fonction négligeable devant une autre

3.1.1 Deux relations de comparaison

Définitions. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant un point a. Soient f et g deux fonctions définies sur I sauf éventuellement au point a.

1. On dit que f est *équivalente* à g en a lorsqu'il existe un voisinage V de a et une fonction ε définie sur $V \setminus \{a\}$ tels que :
$$f(x) = [1 + \varepsilon(x)]g(x) \text{ pour tout } x \in V \setminus \{a\}, \text{ avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$
On note alors : $f \sim g$ en a, ou encore $f \underset{a}{\sim} g$.

2. On dit que f est *négligeable* devant g en a lorsqu'il existe un voisinage V de a et une fonction ε définie sur $V \setminus \{a\}$ tels que :
$$f(x) = \varepsilon(x)g(x) \text{ pour tout } x \in V \setminus \{a\}, \text{ avec } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$
On note alors : $f = o(g)$ en a, ou encore $f \underset{a}{=} o(g)$.

On a des définitions similaires au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $-\infty$. On ne donne ici que celle pour $+\infty$ en laissant au lecteur le soin de l'adapter au cas de $-\infty$.

Définitions. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de la forme $[b, +\infty[$. Soient f et g deux fonctions définies sur I.

1. On dit que f est *équivalente* à g en $+\infty$ lorsqu'il existe un intervalle J de la forme $[c, +\infty[$ avec $c > b$ et une fonction ε définie sur J tels que :
$$f(x) = [1 + \varepsilon(x)]g(x) \text{ pour tout } x \in J, \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$$
On note alors : $f \sim g$ en $+\infty$, ou encore $f \underset{+\infty}{\sim} g$.

2. On dit que f est *négligeable* devant g en $+\infty$ lorsqu'il existe un intervalle J de la forme $[c, +\infty[$ avec $c > b$ et une fonction ε définie sur J tels que :
$$f(x) = \varepsilon(x)g(x) \text{ pour tout } x \in J, \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$$
On note alors : $f = o(g)$ en $+\infty$, ou encore $f \underset{+\infty}{=} o(g)$.

► *Exemples.* On peut reformuler ainsi certaines des limites classiques données en introduction de ce chapitre :

$\sin x \underset{0}{\sim} x$	$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$	$\mathrm{e}^x - 1 \underset{0}{\sim} x$	$(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$ (pour $\alpha \in \mathbb{R}$)

Par le changement de variable $x \leftrightarrow x+1$, on en déduit par exemple que :
$$\ln x \underset{1}{\sim} x - 1, \quad \text{ou} \quad x^\alpha - 1 \underset{1}{\sim} \alpha(x-1) \ \ (\text{pour } \alpha \in \mathbb{R}).$$
On a aussi :

$(\ln x)^\beta \underset{+\infty}{=} o(x^\alpha)$ pour tous $\alpha, \beta > 0$,	$x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(\mathrm{e}^{\gamma x})$ pour tous $\alpha, \gamma > 0$

► *Remarques.* Les deux relations sont liées puisqu'il résulte immédiatement des définitions que, en désignant par a soit un réel soit $\pm\infty$, on a toujours :
$$f \underset{a}{\sim} g \quad \Leftrightarrow \quad f - g \underset{a}{=} o(g).$$
Il est utile dans la pratique de remarquer que les deux relations sont transitives, ce qui signifie :
$$[f \underset{a}{\sim} g \ \text{ et } \ g \underset{a}{\sim} h] \Rightarrow [f \underset{a}{\sim} h] \qquad \text{et} \qquad [f \underset{a}{=} o(g) \text{ et } g \underset{a}{=} o(h)] \Rightarrow [f \underset{a}{=} o(h)\ ].$$
De plus, l'équivalence en a est symétrique, ce qui signifie que : $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow g \underset{a}{\sim} f$,
mais attention, ce n'est bien sûr pas le cas de la négligeabilité !

3.1.2 Règles de calculs sur les équivalents

L'utilisation des équivalents est très pratique et efficace dans les calculs, mais leur maniement présente certaines subtilités et nécessite vigilance et précision pour ne pas faire de raisonnements faux. Il est inutile de retenir une multitude de petits résultats techniques particuliers. On donne ci-dessous quelques énoncés généraux, et pour les autres situations, le plus sûr est souvent de revenir à la définition de départ (qu'il faut connaître parfaitement).

Dans ce qui suit, a désigne indifféremment un réel ou $\pm\infty$. On considère des fonctions définies au voisinage de a, ce qui signifie : lorsque $a \in \mathbb{R}$ qu'elles sont définies sur un intervalle ouvert I contenant a sauf éventuellement en a, lorsque $a = +\infty$ qu'elles sont définies sur un intervalle de la forme $[b, +\infty[$, et lorsque $a = -\infty$ qu'elles sont définies sur un intervalle de la forme $]-\infty, b]$.

Théorème (*équivalent d'un produit*). Soient f_1, f_2, g_1 et g_2 quatre fonctions définies au voisinage de a.

(i) Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$, alors $f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2$.

(ii) Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et si g_1 ne s'annule pas au voisinage de a, alors $\dfrac{1}{f_1} \underset{a}{\sim} \dfrac{1}{g_1}$.

Démonstration. En appliquant directement la définition, on a au voisinage de a :

$$f_1(x) = [1 + \varepsilon_1(x)]g_1(x) \text{ et } f_2(x) = [1 + \varepsilon_2(x)]g_2(x), \text{ avec } \lim_{x\to a} \varepsilon_1(x) = \lim_{x\to a} \varepsilon_2(x) = 0.$$

On calcule $(1 + \varepsilon_1(x))(1 + \varepsilon_2(x)) = 1 + \varepsilon(x)$ en notant $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)$, d'où $f_1(x)f_2(x) = [1 + \varepsilon(x)]g_1(x)g_2(x)$ avec $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$, ce qui prouve (i).
Pour le point (ii), calculons :

$$\frac{1}{1 + \varepsilon_1(x)} = \frac{1 + \varepsilon_1(x) - \varepsilon_1(x)}{1 + \varepsilon_1(x)} = 1 + \varepsilon'(x), \text{ en notant } \varepsilon'(x) = -\frac{\varepsilon_1(x)}{1 + \varepsilon_1(x)}.$$

On a sur un voisinage de a l'égalité $\frac{1}{f_1(x)} = \frac{1}{[1+\varepsilon_1(x)]g_1(x)} = [1 + \varepsilon'(x)]\frac{1}{g_1(x)}$ avec $\lim_{x\to a} \varepsilon'(x) = 0$, ce qui achève la preuve. □

Bien sûr, on déduit de ce théorème les résultats correspondants pour les puissances et les quotients de fonctions.

Proposition (*exemple des fonctions polynomiales et des fractions rationnelles*).

(i) Toute fonction polynomiale est équivalente en $+\infty$ et en $-\infty$ à son terme de plus haut degré.

(ii) Toute fonction rationnelle est équivalente en $+\infty$ et en $-\infty$ au quotient du terme de plus haut degré de son numérateur par le terme de plus haut degré de son dénominateur.

Remarque : on a des résultats analogues pour des équivalents au voisinage de 0 en remplaçant "terme de plus haut degré" par "terme de plus bas degré".

Démonstration. Soit f une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}$. Soit n son degré. Donc f est de la forme $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ pour des réels a_i tels que $a_n \neq 0$. En mettant le terme de plus haut degré $a_n x^n$ en facteur, on obtient : $f(x) = a_n x^n \left(1 + \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} x^{i-n}\right)$, et en notant $\varepsilon(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} x^{i-n}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \varepsilon(x) = 0$, ce qui prouve le point (i). Le point (ii) s'en déduit immédiatement en utilisant la seconde assertion du théorème précédent. □

► *Quelques remarques et points de vigilance*

1. *Attention !* On n'a pas de résultat analogue au théorème précédent pour les sommes d'équivalents. En d'autres termes, $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ n'implique pas que $f_1 + f_2 \underset{a}{\sim} g_1 + g_2$.

   Contrexemple : $x^2 - x \underset{0}{\sim} x^3 - x$ et $x \underset{0}{\sim} x$, mais x^2 n'est pas équivalent à x^3 en 0.

2. *Attention !* Composer les deux termes d'un équivalent par une même fonction ne conserve pas nécessairement l'équivalence. Par exemple $f \underset{\pm\infty}{\sim} g$ n'implique pas $\mathrm{e}^f \underset{\pm\infty}{\sim} \mathrm{e}^g$.

   Contrexemple : $x + 2 \underset{+\infty}{\sim} x$, mais e^{x+2} n'est pas équivalent à e^x en $+\infty$.

3. *Attention !* il n'y a aucune implication générale entre $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x)) = 0$, ni dans un sens ni dans l'autre.

   Contrexemple : $x + 1 \underset{+\infty}{\sim} x$, mais $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+1) - x] \neq 0$.

   Contrexemple : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}) = 0$, mais $\frac{1}{x}$ n'est pas équivalent à $\frac{1}{x^2}$ en $+\infty$.

4. On a vu que $\mathrm{e}^x - 1 \underset{0}{\sim} x$.

   On pourrait aussi écrire $\mathrm{e}^x \underset{0}{\sim} 1 + x$, ce qui est exact, mais n'a pas d'intérêt dans la mesure où l'on a tout autant $\mathrm{e}^x \underset{0}{\sim} 1 + x^2$, ou $\mathrm{e}^x \underset{0}{\sim} 1 + x^n$ pour tout $n \geq 2$.

   Alors qu'en revanche $\mathrm{e}^x - 1$ n'est pas équivalent à x^n pour $n \geq 2$.

   Concrètement, dans un équivalent, les termes négligeables doivent disparaître, et on ne laisse subsister qu'un seul terme dans le second membre.

3.1.3 Règles de calculs sur la négligeabilité

Comme au paragraphe précédent, a désigne indifféremment un réel ou $\pm\infty$, et on considère des fonctions définies au voisinage de a.

Proposition. Soient f, g, h, k des fonctions définies au voisinage de a.

(i) Si $f \underset{a}{=} o(h)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$, alors $\lambda f + \mu g \underset{a}{=} o(h)$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(ii) Si $f \underset{a}{=} o(g)$, alors $fh \underset{a}{=} o(gh)$

(iii) Si $f \underset{a}{=} o(g)$ avec $f \underset{a}{\sim} h$ et $g \underset{a}{\sim} k$, alors $h \underset{a}{=} o(k)$.

Démonstration. Résulte de l'application immédiate des définitions. Détaillons le point (iii) à titre d'exemple en laissant les points (i) et (ii) en exercice. Par hypothèse, il existe trois fonctions ε, ε' et ε'' définies au voisinage de a (sauf éventuellement en a), admettant toutes les trois 0 pour limite quand x tend vers a, et telles que, pour tout x dans un voisinage de a, on ait :

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x),\ f(x) = [1+\varepsilon'(x)]h(x) \text{ et } g(x) = [1+\varepsilon''(x)]k(x).$$

On déduit :

$$h(x) = \tfrac{1}{1+\varepsilon'(x)} f(x) = \tfrac{\varepsilon(x)}{1+\varepsilon'(x)} g(x) = \varepsilon(x) \tfrac{1+\varepsilon''(x)}{1+\varepsilon'(x)} k(x),$$

avec $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to a} \tfrac{1+\varepsilon''(x)}{1+\varepsilon'(x)} = 1$, ce qui prouve que $h \underset{a}{=} o(k)$. □

Proposition (*exemple des fonctions puissances*). Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$. Alors :

$$x^\beta \underset{0}{=} o(x^\alpha) \quad \text{et} \quad x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta).$$

Démonstration. On écrit $x^\beta = x^{\beta-\alpha}x^\alpha$; en notant $\varepsilon(x) = x^{\beta-\alpha}$, on a $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$ car $\beta - \alpha > 0$, ce qui montre la première relation. Pour la seconde relation, on écrit $x^\alpha = x^{\alpha-\beta}x^\beta$; en notant $\varepsilon'(x) = x^{\alpha-\beta}$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \varepsilon'(x) = 0$ car $\alpha - \beta < 0$, ce qui prouve le résultat voulu. □

3.1.4 Remarque sur la comparaison des suites de réels

Les relations d'équivalence et de négligeabilité introduites ci-dessus pour les fonctions dans le cas où $a = +\infty$ ont leur analogue, en tout point identique, pour les suites de réels. Dans le contexte des suites, l'équivalence et la négligeabilité s'entendent toujours pour $n \to +\infty$.

► *Définition.* Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels.

1. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *équivalente* à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq N}$ définie à partir d'un certain rang N telle que :

   $$u_n = [1+\varepsilon_n]v_n \text{ pour tout } n \geq N, \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$$

   On note alors : $u_n \sim v_n$.

2. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *négligeable* devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq N}$ définie à partir d'un certain rang N telle que :

   $$u_n = \varepsilon_n v_n \text{ pour tout } n \geq N, \text{ avec } \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0$$

   On note alors : $u_n = o(v_n)$.

► *Commentaire.* Toutes les propriétés vues ci-dessus sur la comparaison des fonctions au voisinage de $+\infty$ (règles de calcul, exemples de références, précautions à prendre,...) s'appliquent *mutatis mutandis* aux cas des suites.

Ces notions joueront un rôle important dans l'étude des séries numériques au chapitre 5.

3.2 Formule(s) de Taylor

3.2.1 Point de vue global : inégalité de Taylor-Lagrange

Rappelons d'abord la formule de Taylor avec reste intégral que l'on a démontrée en 2.2.4
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction que l'on suppose de classe C^{n+1} sur $[a,b]$. Alors :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k + R_n(x), \text{ avec } R_n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n\,!}(x-t)^n\,dt, \text{ pour tout } x \in [a,b].$$

Comme $f^{(n+1)}$ est continue sur $[a,b]$, elle est bornée sur $[a,x]$ pour tout $x \in [a,b]$, et l'on peut considérer les réels :

$$M_x := \sup_{t\in[a,x]} |f^{(n+1)}(t)| \le \sup_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)| = M_b.$$

On majore alors :

$$|R_n(x)| \le \int_a^x \left|f^{(n+1)}(t)\right| \frac{|x-t|^n}{n\,!}\,dt \le M_x \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n\,!} = M_x\,\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)\,!}.$$

En résumé, on obtient la majoration suivante appelée inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\boxed{|R_n(x)| = \left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k\right| \le M_b\,\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)\,!} \quad \text{pour tout } x \in [a,b]}$$

► *Remarque.* On peut affiner le résultat en montrant qu'il existe un réel ξ compris entre a et x tel que $R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi) \times \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)\,!}$. Cette propriété, dite égalité de Taylor-Lagrange, est hors du programme de ce cours.

► *Commentaire.* Il est important de noter que l'inégalité et l'égalité de Taylor-Lagrange sont des résultats de nature globale, c'est-à-dire valables sur tout l'intervalle $[a,b]$. Ce n'est pas le cas du théorème suivant, qui est de nature locale, c'est-à-dire s'appliquant seulement au voisinage du point considéré.

3.2.2 Point de vue local : théorème de Taylor-Young

Théorème. Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et a un point de I. Soit n un entier naturel. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction n fois dérivable sur I. Alors il existe une fonction ε définie sur I telle que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k + \varepsilon(x)(x-a)^n \quad \text{pour tout } x \in I, \quad \text{avec } \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0.$$

En d'autres termes, et avec la notation vue en 3.1.1, on a encore :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \tfrac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Démonstration. Le théorème est vrai dès lors que f est n fois dérivable sur I [1], mais par souci de simplification, on donne ici la preuve sous l'hypothèse un peu plus forte que f est de classe C^n

1. On peut montrer qu'il suffit de supposer que f est $n-1$ dérivable sur I et n fois dérivable au point a.

sur I. Ceci permet d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n-1$, c'est-à-dire que pour tout $x \in I$, on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k + R_{n-1}(x), \text{ avec } R_{n-1}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)\,!} f^{(n)}(t)\,dt.$$

En écrivant simplement $f^{(n)}(t) = f^{(n)}(a) + f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)$ dans l'intégrale, on décompose :

$$R_{n-1}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)\,!} f^{(n)}(a)\,dt + S_{n-1}(x), \quad \text{avec } S_{n-1}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)\,!}[f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)]\,dt.$$

La première intégrale vaut : $\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)\,!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\,dt = \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)\,!}\left[\frac{-(x-t)^n}{n}\right]_a^x = \frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}(x-a)^n$.

On étudie maintenant la seconde intégrale $S_{n-1}(x)$.

Fixons un réel quelconque $\varepsilon > 0$. Puisque $f^{(n)}$ est continue en a par hypothèse, il existe un voisinage $]a-\eta, a+\eta[$ avec $\eta > 0$ sur lequel on a $|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)| < \varepsilon$. Sur ce voisinage on a :

$$|S_{n-1}(x)| \;\leq\; \int_a^x \frac{|x-t|^{n-1}}{(n-1)\,!}\left|f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a)\right|\,dt \;\leq\; \varepsilon \int_a^x \frac{|x-t|^{n-1}}{(n-1)\,!}\,dt = \varepsilon \frac{|x-a|^n}{n\,!},$$

en remarquant que $(x-t)^{n-1}$ est de signe constant sur $[a, x]$. On déduit de cette majoration que $\lim\limits_{x\to a} \frac{S_{n-1}(x)}{(x-a)^n} = 0$. En récapitulant, il vient :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a)}{n\,!}(x-a)^n + o((x-a)^n),$$

ce qui achève la preuve. □

3.2.3 Exemples d'application

• *Fonction exponentielle.* Appliquons le théorème précédent avec $I = \mathbb{R}$, $a = 0$ et f la fonction exponentielle, qui est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Comme ici $f' = f$, on a $f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc en particulier $f^{(k)}(0) = 1$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k\,!} + \varepsilon(x)x^n = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \cdots + \tfrac{1}{n\,!}x^n + \varepsilon(x)x^n, \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

• *Fonction puissance.* Appliquons le théorème précédent avec $I =]-1, +\infty[$, $a = 0$ et f la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$, qui est de classe C^∞ sur I. Comme ici $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, on a par récurrence $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n\,!}x^n + \varepsilon(x)x^n, \quad \text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0.$$

• *Fonctions trigonométriques.* Appliquons le théorème précédent avec $I = \mathbb{R}$, $a = 0$, f la fonction cosinus et g la fonction sinus, qui sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On a : $f(x) = \cos x$, $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \sin x$, d'où par récurrence $f^{(2k+1)}(0) = 0$ et $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$. De même : $g(x) = \sin x$, $g'(x) = \cos x$, $g''(x) = -\sin x$, $g'''(x) = -\cos x$, d'où par récurrence $g^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ et $g^{(2k)}(0) = 0$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)\,!} + \varepsilon(x)x^{2n+1} = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + \cdots + (-1)^n \tfrac{1}{(2n)\,!}x^{2n} + \varepsilon(x)x^{2n+1},$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,!} + \varepsilon(x)x^{2n+2} = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 + \cdots + (-1)^n \tfrac{1}{(2n+1)\,!}x^{2n+1} + \varepsilon(x)x^{2n+2},$$

avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

3.3 Développements limités

3.3.1 Notion de développement limité

Définitions. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction définie sur un voisinage d'un réel a. On dit que f admet un *développement limité en a à l'ordre n* lorsqu'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$, et une fonction ε définie sur un voisinage V de a tels que :

$$\begin{cases} f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n\varepsilon(x) \quad \text{pour tout } x \in V \\ \text{avec} \quad \lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$$

Le polynôme $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$ s'appelle la *partie régulière* du D.L.
Le terme $f(x) - P(x) = (x-a)^n\varepsilon(x)$ s'appelle le *reste.*

On peut démontrer aisément les propriétés suivantes :

1. Si f admet un D.L. à l'ordre n en a, alors il est unique.
2. Si f admet un D.L. à l'ordre n en a, alors f admet un D.L. à tout ordre $m \leq n$ en a, dont la partie régulière s'obtient en prenant les termes de degré $\leq m$ du D.L. à l'ordre n.
3. Si f admet un D.L. à l'ordre $n \geq 0$ en a, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = a_0$.

► *Exemple :* Considérons la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$ sur l'intervalle $I = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait que $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - x^n \frac{x}{1-x}$. Posons $\varepsilon(x) = \frac{x}{1-x}$ pour $x \in I$. On a donc : $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Le théorème de Taylor-Young 3.2.2 donne de façon immédiate une condition suffisante [2] pour l'existence d'un D.L., comme le précise l'énoncé fondamental suivant.

Théorème. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction n-fois dérivable sur un voisinage d'un réel a. Alors f admet un développement limité en a à l'ordre n, qui est donné par :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \cdots + \tfrac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

Démonstration. Application immédiate du théorème 3.2.2. □

► *Remarque importante : réduction au cas des D.L. au voisinage de 0.* Reprenons les données et notations de la définition ci-dessus. Il est clair que dire que f admet un D.L. à l'ordre n en a équivaut à dire que la fonction g définie par $g(x) = f(x+a)$ admet un D.L. à l'ordre n en 0, ce dernier étant donné par $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon'(x)$, avec $\varepsilon'(x) = \varepsilon(a+x)$.

En clair : *l'étude d'un D.L. peut toujours se ramener à celle d'un D.L. en 0.*

C'est pourquoi, classiquement, on se limite pour les considérations techniques qui vont suivre, à considérer des D.L. au voisinage de 0. Dans le résumé pratique qui suit, on utilise conformément à la définition 3.1.1 la notation $o(x^n)$ pour désigner la fonction $\varepsilon(x)x^n$.

2. On peut vérifier qu'elle n'est pas nécessaire, c'est-à-dire qu'on peut avoir l'existence d'un D.L. sans que les hypothèses de la formule de Taylor-Young soient satisfaites.

Résumé pratique sur les D.L. en 0

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Dire qu'une fonction f définie sur un voisinage de 0 admet un développement limité en 0 à l'ordre n signifie par définition qu'il existe des réels $a_0, a_1, \dots, a_n$ (qui sont alors uniques) tels que, sur un voisinage de 0 :

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}_{\text{partie régulière}} + o(x^n).$$

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction n-fois dérivable sur un voisinage de 0. Alors f admet un D.L. en 0 à l'ordre n, qui est donné par la formule de Taylor-Young :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \tfrac{1}{2}f''(0)x^2 + \cdots + \tfrac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n + o(x^n).$$

En particulier, une fonction indéfiniment dérivable sur un voisinage de 0 admet un D.L. à tout ordre en 0.

• Si une fonction paire f admet un D.L. en 0, alors sa partie régulière n'admet que des puissances de x d'exposant pair (c'est-à-dire $a_i = 0$ si i impair).
Si une fonction impaire f admet un D.L. en 0, alors sa partie régulière n'admet que des puissances de x d'exposant impair (c'est-à-dire $a_i = 0$ si i pair).

► *Généralisations des développements limités.*

1. Si f est définie seulement à droite de 0, on peut parler de D.L. à droite : la définition est la même, ε est définie seulement à droite de 0, et vérifie $\lim\limits_{x \to 0^+} \varepsilon(x) = 0$. Idem à gauche.

2. Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]c, +\infty[$. On dit que f admet un *développement limité (généralisé) au voisinage de* $+\infty$ lorsque la fonction $x \mapsto f(\frac{1}{x})$ admet un D.L. au voisinage de 0 à droite. Idem au voisinage de $-\infty$.

   Considérons par exemple la fonction $f(x) = \frac{x}{x-1}$ sur $]1, +\infty[$. On a $f(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}}$. Lorsque x tend vers $+\infty$, l'inverse $y = \frac{1}{x}$ tend vers 0 à droite. Or on a vu ci-dessus que la fonction $y \mapsto \frac{1}{1-y}$ admet pour tout $n \in \mathbb{N}$ un D.L. en 0 : $\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + \cdots + y^n + y^n\varepsilon(y)$. On en déduit que :

   $$\tfrac{x}{1-x} = 1 + \tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{x^2} + \tfrac{1}{x^3} + \cdots + \tfrac{1}{x^n} + \tfrac{1}{x^n}\varepsilon(\tfrac{1}{x}), \quad \text{avec } \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(\tfrac{1}{x}) = 0$$

   est un D.L. (généralisé) de la fonction f à l'ordre n au voisinage de $+\infty$.

► *Remarque.* On a déjà vu sur les exemples de 3.2.3 que la formule de Taylor-Young permet effectivement de calculer des D.L. Donnons un autre exemple :

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{2 + 2\mathrm{e}^x}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$; calculons un D.L. de f à l'ordre 3 en 0. On calcule les dérivées successives : $f'(x) = (2 + 2\mathrm{e}^x)^{-1/2}\mathrm{e}^x$, $f''(x) = (2 + 2\mathrm{e}^x)^{-3/2}(\mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x)$, $f'''(x) = (2 + 2\mathrm{e}^x)^{-5/2}(\mathrm{e}^{3x} + 2\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^x)$. On en tire les valeurs : $f(0) = 2$, $f'(0) = \frac{1}{2}$, $f''(0) = \frac{3}{8}$, $f'''(0) = \frac{7}{32}$. D'où au voisinage de 0 :

$$\sqrt{2 + 2\mathrm{e}^x} = 2 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{16}x^2 + \tfrac{7}{192}x^3 + o(x^3).$$

Les calculs, on le voit, deviennent vite techniques. Le but des paragraphes suivants est de mettre en évidence des méthodes beaucoup plus rapides et efficaces pour les calculs explicites de D.L.

3.3.2 Développements limités de quelques fonctions classiques

Le principe général est de connaître quelques D.L. classiques de fonctions de références, puis de combiner ceux-ci grâce aux règles rappelées ci-dessous en 3.3.3.

► *Quelques D.L. classiques (en 0)*

Pour tout entier $n \geq 1$, on a le D.L. fondamental que l'on a prouvé en 3.2.3 en appliquant le théorème de Taylor-Young :

$$\boxed{\mathrm{e}^x = 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \cdots + \tfrac{1}{n!}x^n + o(x^n)}$$

On en tire par combinaison linéaire[3] (voir la première proposition de 3.3.3) :

$$\operatorname{ch} x = 1 + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \cdots + \tfrac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh} x = x + \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 + \cdots + \tfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^n\tfrac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^n\tfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

A noter que l'on a également établi directement les D.L. de cos et sin par application du théorème de Taylor-Young en 3.2.3, ce que l'on pourrait faire tout aussi aisément pour sh et ch.

De même à partir du D.L. fondamental que l'on a déterminé en 3.2.3, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \tfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)}$$

on obtient en prenant $\alpha = -1$, puis en changeant x en $-x$, en x^2 et en $-x^2$:

$$\tfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\tfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$\tfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

$$\tfrac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n+1})$$

On en déduit par primitivation (voir ci-dessous la troisième proposition de 3.3.3) :

$$\ln(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n+1}\tfrac{1}{n}x^n + o(x^n)$$

$$\arctan x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \cdots + (-1)^n\tfrac{1}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\operatorname{argth} x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 + \cdots + \tfrac{1}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

3. Pour les fonctions hyperboliques, on écrit simplement : $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ et $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$. Le cas des fonctions trigonométriques nécessite de passer aux nombres complexes pour utiliser la formule d'Euler.

3.3.3 Méthodes de calculs de développements limités

On rappelle ci-dessous quelques unes des règles de calcul les plus élémentaires sur les D.L., déjà vues en première année. Les preuves (qui reposent simplement sur la définition d'un D.L.) sont laissées en exercices ; certaines pourront être détaillées en travaux dirigés.

Proposition (*somme et produit*). Si f et g admettent toutes les deux un D.L. à l'ordre n en 0, alors :

(i) la fonction $f+g$ admet un D.L. à l'ordre n au voisinage de 0 dont la partie régulière est la somme des parties régulières des D.L. de f et g.

(ii) la fonction fg admet un D.L. à l'ordre n au voisinage de 0 dont la partie régulière est formée des termes de degré $\leq n$ dans le produit des parties régulières des D.L. de f et g.

Exemple. Calculons un D.L. à l'ordre 5 au voisinage de 0 de $f(x) = \sin x(\operatorname{ch} x - \frac{1}{1+x})$.

On a d'abord : $\operatorname{ch} x - \frac{1}{1+x} = (1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4) - (1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5) + o(x^5)$
$= x - \frac{1}{2}x^2 + x^3 - \frac{23}{24}x^4 + x^5 + o(x^5)$.

Puis : $f(x) = (x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6))(x - \frac{1}{2}x^2 + x^3 - \frac{23}{24}x^4 + x^5 + o(x^5))$
$= x^2 - \frac{1}{2}x^3 + (-\frac{1}{6}+1)x^4 + (-\frac{23}{24} + \frac{1}{12})x^5 + o(x^5) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{6}x^4 - \frac{7}{8}x^5 + o(x^5)$.

Proposition (*composition*). Si f et g admettent toutes les deux un D.L. à l'ordre n en 0, et si $f(0) = 0$, alors la fonction $g \circ f$ composée de g par f admet un D.L. à l'ordre n au voisinage de 0, dont la partie régulière s'obtient en substituant la partie régulière du D.L. de f dans la partie régulière du D.L. de g, et en ne conservant que les termes de degré $\leq n$.

Exemple. Calculons un D.L. à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $h(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$.

On a $h = g \circ f$ où $\begin{cases} f(x) = \sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \text{ vérifie bien } \ f(0) = 0, \\ g(x) = \mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4). \end{cases}$

donc : $h(x) = 1 + (x - \frac{1}{6}x^3) + \frac{1}{2}(x - \frac{1}{6}x^3)^2 + \frac{1}{6}(x - \frac{1}{6}x^3)^3 + \frac{1}{24}(x - \frac{1}{6}x^3)^4 + o(x^4)$
$= 1 + (x - \frac{1}{6}x^3) + \frac{1}{2}(x^2 - \frac{2}{6}x^4 + \frac{1}{36}x^6) + \frac{1}{6}(x^3 - \frac{3}{6}x^5 + \cdots) + \frac{1}{24}(x^4 + \cdots) + o(x^4)$
$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$.

Proposition (*primitivation*). Si f est continue sur un intervalle I contenant 0 et admet un D.L. à l'ordre n en 0, alors toute primitive F de f sur I admet un D.L. à l'ordre $n+1$ en 0, dont la partie régulière s'obtient (à une constante près) en intégrant terme à terme la partie régulière du D.L. de f.

Exemple. Calculons un D.L. à l'ordre 7 au voisinage de 0 de $F(x) = \arcsin x$.

On a $F'(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$. On obtient un D.L. de f avec la formule donnant un D.L. de $(1+x)^\alpha$ en prenant $\alpha = -\frac{1}{2}$ et en remplaçant x par $-x^2$. On obtient :

$f(x) = 1 + (-\frac{1}{2})(-x^2) + \frac{3}{8}(-x^2)^2 + (-\frac{5}{16})(-x^2)^3 + o(x^6) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + o(x^6)$.

On intègre terme à terme pour conclure : $F(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + o(x^7) + K$, avec K constante réelle. Mais comme on sait que $\arcsin 0 = 0$, on a forcément $K = 0$. On conclut donc finalement : $\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + o(x^7)$.

▶ *Remarque à propos des inverses et des quotients de D.L.* Il existe des méthodes systématiques pour calculer un D.L en 0 d'un quotient $\frac{f}{g}$ lorsqu'on connaît un D.L. de f et de g en 0 (en supposant de plus bien sûr que $g(0) \neq 0$), mais elles sont hors programme de ce cours (division suivant les puissances croissantes). Dans certaines situations particulières, il est possible de raisonner en composant avec un D.L. de $\frac{1}{1+x}$ ou $\frac{1}{1-x}$.

Exemple. Calculons un D.L. à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $f(x) = \frac{x}{\sin x}$.
On a : $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5)$. Posons : $u = \frac{1}{x}(\sin x - x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + o(x^4)$.
Il est clair que u tend vers 0 quand x tend vers 0. De plus, par définition de u, on a :

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{xu+x} = \frac{1}{1+u}.$$

Or $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$, et on peut substituer (en appliquant la proposition de composition ci-dessus) :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - (-\tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{120}x^4) + (-\tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{120}x^4)^2 + o(x^4) \\ &= 1 + \tfrac{1}{6}x^2 + (-\tfrac{1}{120} + \tfrac{1}{36})x^4 + o(x^4) = 1 + \tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{7}{360}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

▶ *Remarque sur le D.L. des fonctions tangente et tangente hyperbolique.* Sans avoir de forme simple pour un D.L. à l'ordre n quelconque, indiquons ici simplement pour mémoire que l'on a en 0 et à l'ordre 8 :

$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$	$\text{th}x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$

3.3.4 Exemples d'applications de développements limités

Un D.L. donne une approximation d'une fonction par un polynôme, ce qui est précieux dans bien des situations : calculs de limites, étude locale d'une courbe, étude des branches infinies, position d'une courbe par rapport à ses asymptotes,... Sans entrer dans les détails, donnons quelques exemples de calculs de limite où les D.L. permettent de "lever une indétermination".

▶ *Exemple.* Calculons $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\tan^2 x}$.
A priori, on a une forme indéterminée car le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers 0. Mais au voisinage de 0, on a $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + x^3\varepsilon(x)$ et $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + x^4\varepsilon'(x)$.

$$\text{Donc :} \quad \frac{1-\cos x}{\tan^2 x} = \frac{\frac{1}{2}x^2 + x^3\varepsilon(x)}{x^2 + x^3\varepsilon'(x)} = \frac{\frac{1}{2} + x\varepsilon(x)}{1 + x\varepsilon'(x)},$$

et comme $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon'(x) = 0$, on conclut que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\tan^2 x} = \frac{1}{2}$.

▶ *Exemple.* Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right]$.
A priori, on a une forme indéterminée car chacun des deux termes de la différence tend vers $+\infty$. Mais au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\ln(1+\tfrac{1}{x}) = \tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{2x^2} + \tfrac{1}{3x^3} + \tfrac{1}{x^3}\varepsilon(\tfrac{1}{x}), \quad \text{avec } \lim_{x\to+\infty} \varepsilon(\tfrac{1}{x}) = 0,$$

car $\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + u^3\varepsilon(u)$ pour $u = \frac{1}{x}$ au voisinage de 0. Donc :

$$x^2\ln(1+\tfrac{1}{x}) = x - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3x} + \tfrac{1}{x}\varepsilon(\tfrac{1}{x}), \quad \text{avec } \lim_{x\to+\infty} \varepsilon(\tfrac{1}{x}) = 0,$$

d'où l'on tire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3x} - \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})\right] = \frac{1}{2}$.

Chapitre 4

Intégrales impropres

4.1 Notion d'intégrale convergente

On a défini et étudié au chapitre 2 la notion d'intégrale d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, ou plus généralement continue par morceaux, sur un segment, c'est-à-dire un intervalle fermé borné $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R},\ a \leq b$. On cherche maintenant dans ce chapitre 4 à étendre cette notion aux cas où f est définie sur un intervalle ouvert, ou semi-ouvert, ou infini. On parle alors *d'intégrale impropre*, ou *d'intégrale généralisée*.

Définition. Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *continue par morceaux sur I* lorsqu'elle est continue par morceaux, au sens de 2.4.1, sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I.

4.1.1 Cas d'un intervalle borné semi-ouvert

On considère une fonction $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux, avec $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$; f n'est pas définie en b.

Si f admet une limite finie à gauche en b, notée $\ell = \lim_{t \to b^-} f(t) \in \mathbb{R}$, alors on peut prolonger f par continuité en b en posant $f(b) = \ell$. Ce prolongement est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$, pour laquelle l'intégrale est bien définie. Dans ce cas, il n'y a pas de problème.

La vraie question se pose lorsque $\lim_{t \to b^-} f(t) = \pm\infty$ ou n'existe pas. Dans ce cas, le principe est de prendre $a \leq x < b$, de sorte que f est continue par morceaux sur $[a, x]$, de considérer alors $\int_a^x f(t)\, dt$, puis de faire tendre x vers b à gauche. Ceci conduit à la définition suivante :

Définition. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$.

- On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ converge lorsque $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\, dt$ existe dans $\mathbb{R}$; on pose alors :

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\, dt.$$

- Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ diverge.

► *Remarque.* On a une notion analogue pour $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ lorsque f n'admet pas de limite finie à droite en a ; on prend $a < x \leq b$, on considère $\int_x^b f(t)\, dt$, puis on fait tendre x vers a à droite.

▶ *Exemple 1.* Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.
On a $\lim\limits_{t \to 1^-} f(t) = +\infty$. Pour tout $x \in [0,1[$, on calcule :

$$\int_0^x f(t)\,dt = \big[\arcsin t\big]_0^x = \arcsin x.$$

Comme $\lim\limits_{x \to 1} \arcsin x = \frac{\pi}{2}$, on conclut que :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \text{ converge,} \quad \text{et} \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

▶ *Exemple 2.* Soit $f : [0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{1}{1-t}$.
On a $\lim\limits_{t \to 1^-} f(t) = +\infty$. Pour $x \in [0,1[$, on calcule :

$$\int_0^x f(t)\,dt = -\big[\ln(1-t)\big]_0^x = -\ln(1-x).$$

Comme $\lim\limits_{x \to 1^-} \ln(1-x) = -\infty$, on conclut que :

$$\int_0^1 \frac{dt}{1-t} \text{ diverge.}$$

4.1.2 Cas d'un intervalle non borné

On considère une fonction $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux, avec $a \in \mathbb{R}$. L'intervalle sur lequel on veut intégrer n'est donc pas borné. Dans ce cas, le principe est de prendre $x > a$, de sorte que f est continue par morceaux sur $[a,x]$, de considérer alors $\int_a^x f(t)\,dt$, puis de faire tendre x vers $+\infty$. Ceci conduit à la définition suivante.

Définition. Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $[a,+\infty[$.

- On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge lorsque $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt$ existe dans $\mathbb{R}$; on pose alors :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt.$$

- Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge.

▶ *<u>Attention</u> à une erreur fréquente et grave :* la condition $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$ n'est pas suffisante [1] pour assurer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$; voir l'exemple 1 ci-dessous.

▶ *Remarque.* On a bien sûr une notion analogue pour un intervalle du type $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$; on prend $x < b$, on considère $\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$, puis on fait tendre x vers $-\infty$.

1. Elle n'est pas non plus nécessaire (on verra plus loin que $\int_1^{+\infty} \cos(t^2)dt$ converge bien que $f(t) = \cos(t^2)$ n'admette pas de limite pour $t \to +\infty$). En revanche on peut montrer que si $f(t)$ admet une limite finie ℓ pour $t \to +\infty$, et si on sait que $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente, alors nécessairement $\ell = 0$.

▶ Exemple 1. Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{1}{t}$.
Pour tout $x \in [1,+\infty[$, on calcule :
$$\int_1^x f(t)\,dt = \big[\ln t\big]_1^x = \ln x.$$
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, on conclut que :
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t} \text{ diverge.}$$

▶ Exemple 2. Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{1}{t^2}$.
Pour tout $x \in [1,+\infty[$, on calcule :
$$\int_1^x f(t)\,dt = \big[-\frac{1}{t}\big]_1^x = 1 - \frac{1}{x}.$$
Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$, on conclut que :
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \text{ converge, et } \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1.$$

▶ Exemple 3. Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \cos t$.
Pour tout $x \in [1,+\infty[$, on calcule :
$$\int_1^x f(t)\,dt = \big[\sin t\big]_1^x = \sin x - \sin 1.$$
Comme la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$, on conclut que :
$$\int_1^{+\infty} \cos t\,dt \text{ diverge.}$$

4.1.3 Cas général

Lorsqu'il y a un problème potentiel aux deux bornes de l'intégrale, le principe consiste à décomposer l'intégrale en une somme de deux intégrales (par la relation de Chasles) et à étudier séparément chacun des deux morceaux. Plus précisément, on a la définition suivante :

Définition. Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $]a,b[$, avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$, et $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$.

- On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge lorsque les intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ convergent toutes les deux, pour c un réel arbitraire tel que $a < c < b$; dans ce cas, on pose :
$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$
- Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ diverge.

► *Remarque importante.* Notons qu'il est équivalent de dire qu'il existe $a < c < b$ tel que les deux intégrales $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ convergent, ou de dire qu'elles convergent pour tout $a < c < b$, De plus, dans ce cas, il résulte de la relation de Chasles que la valeur de $\int_a^b f(t)\,dt$ ne dépend pas du c choisi.

► *Exemple 1.* Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

On a $\lim_{t\to 1^-} f(t) = \lim_{t\to -1^+} f(t) = +\infty$. On a donc un problème en -1 et un problème en 1. On étudie séparément $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ et $\int_{-1}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Notons qu'on a coupé en 0, mais qu'on aurait pu choisir n'importe quel autre réel $-1 < c < 1$.

On a vu plus haut que $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$. On montre de même[2] que :

$$\int_{-1}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{x\to -1^+} \int_x^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{x\to -1^+} \big[\arcsin t\big]_x^0 = \lim_{x\to -1^+} (-\arcsin x) = \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion : $\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ converge et vaut $\int_{-1}^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$.

► *Exemple 2.* Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{1}{t^2}$.

On a un problème en $+\infty$ (intervalle non borné), et un problème en 0 puisque $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{t^2} = +\infty$. On étudie donc séparément $\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$. Notons qu'on a coupé en 1, mais qu'on aurait pu choisir n'importe quel autre réel $c > 0$.

On a vu plus haut que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge et vaut 1. On considère par ailleurs :

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{dt}{t^2} = \lim_{x\to 0^+} \big[-\tfrac{1}{t}\big]_x^1 = \lim_{x\to 0^+} (\tfrac{1}{x} - 1) = +\infty\ , \ \text{ donc } \int_0^1 \tfrac{dt}{t^2} \text{ diverge.}$$

Ainsi $\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$ diverge et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge : on conclut que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ diverge.

► *Attention à une erreur fréquente et grave :*

il ne suffit pas que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^x f(t)\,dt$ existe dans $\mathbb{R}$ pour que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

En effet, dire que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge signifie que les deux intégrales $\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ convergent, c'est-à-dire qu'à la fois $\lim\limits_{x\to-\infty} \int_x^0 f(t)\,dt$ existe dans $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt$ existe dans $\mathbb{R}$, ce que n'implique pas l'existence de la seule limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{-x}^x f(t)\,dt$.

Par exemple $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,dt$ diverge car $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x t\,dt = +\infty$ et $\lim\limits_{y\to-\infty} \int_y^0 t\,dt = -\infty$.

Et pourtant $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_{-x}^x t\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \big[\frac{t^2}{2}\big]_{-x}^x = 0$ par parité de x^2.

► *Remarque sur la linéarité.* Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b[$ ou $]a,b]$ telles que les intégrales $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ convergent, alors :

$$\text{pour tous } \lambda,\mu \in \mathbb{R},\ \ \int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,dt \text{ converge et vaut } \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt,$$

ceci par application immédiate de la proposition 2.2.1 et de la linéarité du passage à la limite.

2. On peut aussi le déduire directement par parité.

Résumé pratique sur le calcul des intégrales impropres

• Avant tout, bien repérer la ou les bornes de l'intervalle où il y a un problème.

Décomposer éventuellement en une somme d'intégrales avec problème à la borne de droite (ie. du type $\int_a^b f(t)\,dt$ avec $b = +\infty$, ou $b \in \mathbb{R}$ tel que f n'a pas de limite finie en b à gauche) et d'intégrales avec problème à la borne de gauche (ie. du type $\int_a^b f(t)\,dt$ avec $a = -\infty$, ou $a \in \mathbb{R}$ tel que f n'a pas de limite finie en a à droite).

• Pour le premier type, introduire $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pour un réel x tel que $a < x < b$, qui est une intégrale classique (au sens du chapitre 2).

Chercher à calculer $I(x)$ par les méthodes usuelles (calcul de primitives, changement de variables, intégration par parties...)

Puis, dans le résultat (qui dépend de x) faire tendre x vers b à gauche : si $\lim_{x\to b^-} I(x)$ existe dans $\mathbb{R}$, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge et vaut la valeur de cette limite ; sinon l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge.

• Procéder de même pour le second type, et synthétiser éventuellement les résultats obtenus aux deux bornes en utilisant la définition 4.1.3.

4.1.4 Un exemple fondamental : intégrale de type Riemann

Proposition. Fixons un réel α. Pour tout réel $c > 0$, on a :

(i) l'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$;

(ii) l'intégrale $\displaystyle\int_0^c \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Démonstration. Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est continue sur $]0, +\infty[$, le choix de c est arbitraire. On peut donc choisir $c = 1$.

Pour le point (i), introduisons $x > 1$ et calculons $I(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \int_1^x t^{-\alpha}\,dt$. Si $\alpha = 1$, on a $I(x) = \big[\ln t\big]_1^x = \ln x$, qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Si $\alpha \neq 1$, on a $I(x) = \big[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\big]_1^x = \frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha} - 1)$. Quand x tend vers $+\infty$, cette expression tend vers $+\infty$ si $1 - \alpha > 0$, et vers $\frac{1}{\alpha-1}$ si $1 - \alpha < 0$. Ce qui prouve le résultat voulu.

Pour le point (ii), introduisons $0 < x < 1$ et calculons $J(x) = \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \int_x^1 t^{-\alpha}\,dt$. Si $\alpha = 1$, on a $J(x) = \big[\ln t\big]_x^1 = -\ln x$, qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0 à droite. Si $\alpha \neq 1$, on a $J(x) = \big[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\big]_x^1 = \frac{1}{\alpha-1}(x^{1-\alpha} - 1)$. Quand x tend vers 0, cette expression tend vers $+\infty$ si $1 - \alpha < 0$, et vers $\frac{1}{1-\alpha}$ si $1 - \alpha > 0$. Ce qui prouve le résultat voulu. □

4.2 Conditions suffisantes de convergence

Il est très rare dans les faits que l'on sache calculer explicitement une intégrale généralisée. Le plus souvent, on est déjà bien content quand on sait déterminer sa *nature*, c'est-à-dire démontrer qu'elle est convergente ou divergente. On dispose pour cela de divers critères. On présente ci-dessous les plus usuels. Les deux premiers portent sur les *fonctions positives* (attention ! ils peuvent être faux sinon). On les énonce pour des intégrales généralisées avec problème de convergence à la borne de droite ; il y a bien sûr des énoncés analogues pour des intégrales généralisées avec problème de convergence à la borne de gauche.

4.2.1 Règle de majoration pour les fonctions positives

Proposition. Soient f et g deux applications $[a,b[\to\mathbb{R}$ continues par morceaux sur $[a,b[$, où a est un réel, et b est soit un réel supérieur à a, soit $+\infty$. On suppose que :

$$\text{pour } t \text{ assez grand, on a } 0 \le f(t) \le g(t).$$

Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ converge.

Remarques.

- Il en résulte bien sûr que, si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge, alors l'intégrale $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge.
- Rappelons que l'expression "pour t assez grand, on a $0 \le f(t) \le g(t)$" signifie qu'il existe un réel $c \in [a,b[$ tel que, pour tout $t \in [c,b[$, on a $0 \le f(t) \le g(t)$.

Démonstration. Par hypothèse, il existe $c \in [a,b[$ tel que $0 \le f(t) \le g(t)$ pour tout $t \in [c,b[$. Pour tout $x \in [c,b[$, posons $F(x) = \int_c^x f(t)\,dt$ et $G(x) = \int_c^x g(t)\,dt$. D'après 2.3.1, on a : $0 \le F(x) \le G(x)$ pour tout $x \in [c,b[$. Puisque $F' = f$ et $G' = g$ sont positives sur $[c,b[$, les fonctions F et G sont croissantes sur $[c,b[$. Comme l'intégrale $\int_a^b g(t)\,dt$ est supposée convergente, il en est de même de l'intégrale $\int_c^b g(t)\,dt$, et la fonction croissante G est majorée sur $[c,b[$ par le réel $M = \int_c^b g(t)\,dt = \lim_{x\to b^-} G(x)$. Donc la fonction F est majorée par M sur $[c,b[$. Etant de plus croissante, F admet donc une limite pour x tendant vers b à gauche. Ceci signifie que l'intégrale $\int_c^b f(t)\,dt$ converge, d'où le résultat. $\square$

Exemples.

- ▶ $I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,dt$. Posons $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ et $g(t) = \mathrm{e}^{-t}$, qui vérifient $0 \le f(t) \le g(t)$ pour $t \ge 1$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt$ converge, car $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_1^x \mathrm{e}^{-t}\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_1^x = \frac{1}{\mathrm{e}}$. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt$ converge aussi, et I converge d'après la proposition ci-dessus.
- ▶ $I = \int_0^1 \sin t \ln t\,dt$. Posons $f(t) = -\sin t \ln t$ et $g(t) = -\ln t$, d'où $0 \le f(t) \le g(t)$ pour $t \in]0,1]$. L'intégrale $\int_0^1 \ln t\,dt$ est convergente, car $\lim\limits_{x\to 0^+} \int_x^1 \ln t\,dt = \lim\limits_{x\to 0^+} \left[t\ln t - t\right]_x^1 = -1$. Donc l'intégrale $\int_0^1 (-\ln t)\,dt$ converge, et I converge aussi d'après la proposition ci-dessus.
- ▶ $I = \int_2^{+\infty} \frac{dt}{(\ln t)\sqrt{t}}$. Pour t assez grand, on a $0 < \ln t < \sqrt{t}$, d'où $\frac{1}{(\ln t)\sqrt{t}} \ge \frac{1}{t}$. Or on a vu en 4.1.2 que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t}$ diverge. Donc I diverge aussi d'après la proposition ci-dessus.

Corollaire (*règle de comparaison avec une intégrale de Riemann*).
Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *positive et continue par morceaux sur* $[a, +\infty[$, *avec* $a \in \mathbb{R}_+^*$.

(i) *S'il existe* $\alpha > 1$ *tel que* $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = 0$, *alors l'intégrale* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *converge.*

(ii) *S'il existe* $\alpha \leq 1$ *tel que* $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$, *alors l'intégrale* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ *diverge.*

Démonstration. Si $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = 0$, on a pour t assez grand $f(t) \leq \frac{1}{t^\alpha}$; comme $\alpha > 1$, on sait d'après le point (i) de la proposition 4.1.4 que $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge, ce qui prouve (i) grâce à la proposition ci-dessus. Le point (ii) se montre de même. □

4.2.2 Règle d'équivalence pour les fonctions positives

Proposition. Soient f et g deux applications $[a, b[\to \mathbb{R}$ continues par morceaux, où a est un réel, et b est soit un réel strictement supérieur à a, soit $+\infty$. On suppose que :

$$\Big[\text{ pour } t \text{ assez grand, } f(t) \geq 0 \text{ et } g(t) \geq 0\ \Big] \quad \text{et} \quad \Big[\ f \text{ est équivalente à } g \text{ au voisinage de } b\Big].$$

Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,dt$ sont de même nature.

Démonstration. L' hypothèse $f \sim_b g$ implique qu'il existe un réel $c \in [a, b[$ tel que, pour tout $t \in [c, b[$, on a $f(t) = (1 + \varepsilon(t))g(t)$ avec $\lim\limits_{t \to b} \varepsilon(t) = 0$. Donc, pour t assez grand dans $[c, b[$, on a $|\varepsilon(t)| < \frac{1}{2}$, ou encore $-\frac{1}{2} \leq \varepsilon(t) \leq \frac{1}{2}$, d'où $\frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t)$.
Si l'on suppose que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge, la première inégalité $\frac{1}{2}g(t) \leq f(t)$ implique d'après la proposition 4.2.1 que l'intégrale $\int_a^b g(t)\,dt$ converge. Si l'on suppose que $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, la seconde inégalité $f(t) \leq \frac{3}{2}g(t)$ implique de même que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.
En résumé, les deux intégrales $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ sont, soit toutes les deux convergentes, soit toutes les deux divergentes, ce qui est le résultat voulu. □

► *Exemple.* $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{t(1-t)}}\,dt$

La fonction f définie par $f(t) = \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{t(1-t)}}$ est continue sur $]0, 1[$. Il y a un problème à chaque borne. On décompose $I = I_1 + I_2$ avec $I_1 = \int_0^{1/2} f(t)\,dt$ et $I_2 = \int_{1/2}^1 f(t)\,dt$.

En 0 à droite : $\ln(1+t) \sim t$ et $t\sqrt{t(1-t)} \sim t^{\frac{3}{2}}$, donc $f(t) \sim t^{-\frac{1}{2}}$. Comme il s'agit de fonctions positives, I_1 est de même nature que $J_1 = \int_0^{1/2} t^{-\frac{1}{2}}\,dt$ c'est-à-dire convergente en appliquant le cas (ii) de la proposition 4.1.4 avec $\alpha = \frac{1}{2} < 1$.

En 1 à gauche : $f(t) \sim \frac{\ln 2}{\sqrt{1-t}}$. Comme il s'agit de fonctions positives, I_2 est de même nature que $J_2 = \int_{1/2}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ donc convergente car $J_2 = \lim\limits_{x \to 1^-} \big[-2\sqrt{1-t}\big]_{1/2}^x = \sqrt{2}$.

Finalement I converge car I_1 et I_2 convergent.

4.2.3 Deux exemples classiques : intégrales de Bertrand et fonction Γ

Intégrales de Bertrand

On fixe un réel $c > 1$ quelconque. Pour tous réels α, β, γ :

(i) $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\, dt$ converge si et seulement si $(\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$;

(ii) $\displaystyle\int_0^{1/c} \frac{1}{u^\gamma |\ln u|^\beta}\, du$ converge si et seulement si $(\gamma < 1)$ ou $(\gamma = 1$ et $\beta > 1)$.

Démonstration. Il suffit de montrer (i) car (ii) s'en déduit par le changement de variables $u = \frac{1}{t}$, avec $\gamma = 2 - \alpha$. Posons donc $f(t) = \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ pour tout $t \in [c, +\infty[$, et $I = \int_c^{+\infty} f(t)\, dt$.

Si $\alpha > 1$, en notant $\alpha' = \frac{1}{2}(\alpha + 1) > 1$ on a $t^{\alpha'} f(t) = t^{(1-\alpha)/2} (\ln t)^{-\beta}$ qui tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$, ce qui, d'après le cas (i) du corollaire 4.2.1, prouve que I converge.

Si $\alpha < 1$, on a $t f(t) = t^{1-\alpha} (\ln t)^{-\beta}$ qui tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$, ce qui, d'après le cas (ii) du corollaire 4.2.1, prouve que I diverge.

Si $\alpha = 1$, on fait le changement de variable $u = \ln t$, de sorte que pour tout $x > c$, on a $\int_c^x f(t)\, dt = \int_{\ln c}^{\ln x} \frac{1}{u^\beta}\, du$. Donc I converge si et seulement si $\int_c^{+\infty} \frac{1}{u^\beta}\, du$ converge. D'après le cas (i) de 4.1.4, ceci équivaut à $\beta > 1$. $\square$

Fonction eulerienne Γ

(i) Pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\, dt$ est convergente.

(ii) Pour tout réel $x > 0$, on a $\Gamma(x + 1) = x \times \Gamma(x)$.

(iii) Pour tout entier $n > 0$, on a $\Gamma(n) = (n - 1)!$.

Démonstration. Pour montrer (i), on fixe $x > 0$. Notons pour simplifier $f(t) = \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}$, de sorte que $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt$. Il y a un problème en $+\infty$, et un autre en 0 car $x - 1$ peut être strictement négatif et t^{x-1} tend alors vers l'infini pour t tendant vers 0. On étudie donc séparément $\int_0^1 f(t)\, dt$ et $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$.

Etude du problème en 0 : $f(t)$ est positive pour tout $t \in]0, 1]$ et $f(t)$ est équivalent à t^{x-1} au voisinage de 0. Or $\int_0^1 t^{x-1}\, dt = \int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}$ est convergente par application du point (ii) de la proposition 4.1.4 puisque $1 - x < 1$ par hypothèse. On applique donc la proposition 4.2.2 pour conclure que $\int_0^1 f(t)\, dt$ converge.

Etude du problème en $+\infty$: on sait que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x+1} = 0$, c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} t^2 f(t) = 0$. On applique donc le point (i) du corollaire de 4.2.1 pour conclure que $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ converge.

Bilan : les deux intégrales $\int_0^1 f(t)\, dt$ et $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ sont convergentes donc, d'après 4.1.3, l'intégrale $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\, dt$ est convergente.

Pour montrer (ii), on fixe toujours $x > 0$ et on introduit pour tout réel $y > 0$ l'intégrale $J_y(x+1) = \int_0^y \mathrm{e}^{-t} t^x \, dt$. Sur cette intégrale ordinaire, on fait une intégration par parties en posant $u'(t) = \mathrm{e}^{-t}$, $u(t) = -\mathrm{e}^{-t}$, $v(t) = t^x$, $v'(t) = xt^{x-1}$. Donc :

$$\begin{aligned} J_y(x+1) &= \int_0^y u'(t)v(t)\,dt = \big[u(t)v(t)\big]_0^y - \int_0^y u(t)v'(t)\,dt \\ &= \big[-\mathrm{e}^{-t}t^x\big]_0^y + x\int_0^y \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\,dt = xJ_y(x) - \mathrm{e}^{-y}y^{x-1}. \end{aligned}$$

Puis on passe à la limite pour $y \to +\infty$ dans cette égalité ; il vient $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) - 0$, ce qui prouve (ii). Pour montrer (iii), on utilise le point (ii) pour déduire que $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$, d'où par récurrence $\Gamma(n) = (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \cdots 3 \times 2 \times 1 \times \Gamma(1)$. On calcule enfin $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,dt = \big[-\mathrm{e}^{-t}\big]_0^{+\infty} = 1$, ce qui achève la preuve. □

4.2.4 Convergence absolue

Définition. Soit f une application $[a,b[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux, où a est un réel, et b est soit un réel strictement supérieur à a, soit $+\infty$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente lorsque l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\,dt$ est convergente.

► *Remarques.* Cette définition est justifiée par le fait que la continuité par morceaux de f sur $[a,b[$ implique que la fonction $|f| : [a,b[\to \mathbb{R}^+$ est aussi continue par morceaux sur $[a,b[$.
Comme dans le cas des propositions précédentes, on a choisi de formuler cette définition sur un intervalle du type $[a,b[$, mais on a bien sûr la même définition dans le cas d'un intervalle $]a,b]$, avec b réel et a réel $< b$ ou $-\infty$.

► *Exemple.* Pour tout $\alpha > 1$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}\,dt$ est absolument convergente.

En effet, notons $f(t) = \frac{\sin t}{t^\alpha}$. Pour tout $t \geq 1$, on a $|\sin t| \leq 1$, donc $|f(t)| \leq \frac{1}{t^\alpha}$. Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge d'après 4.1.4, on déduit de 4.2.1 que l'intégrale $\int_1^{+\infty} |f(t)|\,dt$ converge. Ceci signifie par définition que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ est absolument convergente.

Un intérêt de la notion d'intégrale absolument convergente est qu'elle fournit une condition suffisante de convergence de l'intégrale, en se ramenant au cas d'une fonction réelle positive, pour laquelle on peut appliquer les critères 4.2.1 et 4.2.2. C'est ce que montre le théorème suivant.

Théorème. Soit f une application $[a,b[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux, où a est un réel, et b est soit un réel strictement supérieur à a, soit $+\infty$. Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente, alors elle est convergente, et l'on a :

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Démonstration. Considérons sur $[a,b[$ les deux fonctions f^+ et f^- définies par $f^+(t) = \max(f(t),0)$ et $f^-(t) = \max(-f(t),0)$. On peut vérifier aisément qu'elles sont continues par morceaux sur $[a,b[$. De plus par définition, elles sont positives et vérifient :

$$f(t) = f^+(t) - f^-(t) \quad \text{et} \quad |f(t)| = f^+(t) + f^-(t).$$

On en déduit en particulier que :

$$0 \leq f^+(t) \leq |f(t)| \quad \text{et} \quad 0 \leq f^-(t) \leq |f(t)|.$$

On suppose que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est absolument convergente, donc que $\int_a^b |f(t)|\,dt$ est convergente. Il résulte alors des majorations ci-dessus, en utilisant 4.2.1, que les intégrales $\int_a^b f^+(t)\,dt$ et $\int_a^b f^-(t)\,dt$ convergent. Cela signifie que $\lim\limits_{x\to b} \int_a^x f^+(t)\,dt$ et $\lim\limits_{x\to b} \int_a^x f^-(t)\,dt$ existent dans $\mathbb{R}$.

Or pour tout $x \in [a, b[$, on a par linéarité $\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x f^+(t)\,dt - \int_a^x f^-(t)\,dt$, et donc :

$$\lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,dt \text{ existe dans } \mathbb{R}, \text{ et vaut } \int_a^b f^+(t)\,dt - \int_a^b f^-(t)\,dt.$$

On conclut que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente.

De plus, en notant $I^+ = \int_a^b f^+(t)\,dt \geq 0$, $I^- = \int_a^b f^-(t)\,dt \geq 0$ et $I = I^+ - I^-$, on a :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = |I| = |I^+ - I^-| \ \leq \ I^+ + I^- = \int_a^b |f(t)|\,dt,$$

ce qui achève la preuve. $\square$

► *Remarque importante.* Lorsque l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\,dt$ diverge, le théorème ne permet pas de conclure quoi que ce soit sur la convergence de $\int_a^b f(t)\,dt$, qui peut soit converger soit diverger. En d'autres termes, le théorème affirme que la convergence absolue entraîne la convergence, mais la réciproque est fausse. Explicitement :

$$\begin{cases} \text{si } \int_a^b |f(t)|\,dt \text{ converge, alors } \int_a^b f(t)\,dt \text{ converge,} \\ \text{mais on peut avoir } \int_a^b f(t)\,dt \text{ qui converge bien que } \int_a^b |f(t)|\,dt \text{ diverge.} \end{cases}$$

On utilise parfois le terme d'*intégrale semi-convergente* pour désigner une intégrale impropre qui est convergente mais qui n'est pas absolument convergente, comme l'exemple classique suivant.

Intégrale de Dirichlet

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ est convergente mais non absolument convergente.

Démonstration. On décompose l'intégrale en $I+J$ avec $I = \int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt$ et $J = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$. Comme $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$, on fait un prolongement par continuité en 0 et I est une intégrale ordinaire.

Pour J, on pose $J_x = \int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ pour tout $x > 1$. On intègre par parties en posant $u = -\cos t$ et $v = \frac{1}{t}$ pour obtenir :

$$J_x = \left[-\tfrac{\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \tfrac{\cos t}{t^2}\,dt.$$

D'une part $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_1^x = \cos 1$ existe dans $\mathbb{R}$. D'autre part, il est clair que $|\frac{\cos t}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$, d'où l'on déduit avec 4.1.4 et 4.2.1 que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ est absolument convergente, et donc convergente d'après le théorème ci-dessus. En résumé, J_x admet une limite finie dans $\mathbb{R}$ pour x tendant vers $+\infty$, et donc J converge. L'intégrale de Dirichlet $I + J$ est donc convergente.

Pour montrer que l'intégrale n'est pas absolument convergente, posons $G(x) = \int_0^x \frac{|\sin t|}{t}\,dt$ pour tout $x > 1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [(k-1)\pi, k\pi]$, on a $\frac{|\sin t|}{t} \geq \frac{|\sin t|}{k\pi}$, d'où d'après 2.3.1 :

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt \geq \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin t|\,dt = \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin t\,dt = \frac{1}{k\pi}\big[-\cos t\big]_0^{\pi} = \frac{2}{k\pi}.$$

On déduit par la relation de Chasles que : $G(n\pi) = \int_1^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt = \sum\limits_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt \geq \frac{2}{\pi} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
Posons $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. On peut vérifier que la suite de réels positifs $(S_n)_{n\geq 1}$ diverge vers $+\infty$ (on le fera au chapitre 5). Donc $\lim_{n\to+\infty} G(n\pi) = +\infty$. Comme la fonction G est continue sur $[1, +\infty[$, il en résulte que $G(x)$ ne peut pas admettre de limite finie pour x tendant vers $+\infty$, ce qui signifie que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$ diverge, et donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,dt$ diverge. □

> Résumé pratique sur la nature des intégrales impropres
>
> • Avant tout, bien repérer la ou les bornes de l'intervalle où il y a un problème, puis bien identifier la question : s'agit-il de calculer l'intégrale impropre, ou uniquement de déterminer sa nature (convergente ou divergente) ?
>
> • Pour calculer l'intégrale, se reporter au résumé pratique précédent p. 37.
>
> • Pour déterminer la nature de l'intégrale impropre si la fonction est positive au voisinage de la borne étudiée, chercher à se ramener par majoration ou par équivalence à une intégrale impropre “classique” dont on connaît la nature.
>
> • Si la fonction n'est pas de signe constant au voisinage de la borne étudiée, regarder éventuellement si l'intégrale est absolument convergente.

4.2.5 Exemples de synthèse

► L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(t^2)\,dt$ converge, bien que $\lim\limits_{t\to+\infty} \cos(t^2)$ n'existe pas

Démonstration. Pour tout $x > 1$, notons $J_x = \int_1^x \cos(t^2)\,dt$. On fait le changement de variables $u = t^2$, d'où $du = 2t\,dt$ et donc $dt = \frac{du}{2\sqrt{u}}$ (car $u > 0$ et $t > 0$). On obtient $J_x = \int_1^{x^2} \frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\,du$.
Pour tout $y > 1$, posons $I_y = \int_1^y \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\,du$. Une intégration par parties donne $I_y = \left[\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\right]_1^y + \frac{1}{2}\int_1^y \frac{\sin u}{u^{3/2}}\,du$. Le premier terme est sans problème : $\lim\limits_{y\to+\infty}(\frac{\sin y}{\sqrt{y}} - \frac{\sin 1}{\sqrt{1}}) = -\sin 1$.
La limite du second se ramène à l'étude de la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{3/2}}\,du$.
Or on a la majoration : $\left|\frac{\sin u}{u^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{u^{3/2}}$, d'où en appliquant 4.1.4 et 4.2.1, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin u}{u^{3/2}}\right| du$ converge. En d'autres termes, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{3/2}}\,du$ est absolument convergente, et donc convergente d'après 4.2.4. Ceci signifie que $\int_1^y \frac{\sin u}{u^{3/2}}\,du$ tend vers une limite finie (notons-la L) dans $\mathbb{R}$ lorsque y tend vers $+\infty$.
On en déduit que $\lim\limits_{y\to+\infty} I_y = L - \sin 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} J_x = \frac{1}{2}\lim\limits_{y\to+\infty} I_y$ existe dans $\mathbb{R}$, ce qui signifie que $\int_1^{+\infty} \cos(t^2)\,dt$ converge. □

► L'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} \sin^2 \omega t \, dt$ converge, et vaut $\dfrac{2\omega^2}{\alpha(\alpha^2 + 4\omega^2)}$ (avec $\alpha > 0$ réel fixé).

Démonstration.

✓ Si l'on veut juste montrer la convergence, on part de la majoration : $0 \leq \mathrm{e}^{-\alpha t} \sin^2 \omega t \leq \mathrm{e}^{-\alpha t}$. Or $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\, dt$ converge, car $\int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\, dt = \left[\frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{-\alpha}\right]_0^x = \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha x}}{\alpha}$ tend vers une limite finie $\frac{1}{\alpha}$ quand $x \to +\infty$. Donc par application de 4.2.1, on conclut que J converge.

✓ Si l'on veut calculer la valeur de J, on introduit pour tout réel $x > 0$ l'intégrale $J_x = \int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t} \sin^2 \omega t\, dt$. On rappelle que $\sin^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)$, de sorte que par linéarité :

$$J_x = \tfrac{1}{2} \int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}(1 - \cos 2\omega t)\, dt = \tfrac{1}{2} \left[\frac{\mathrm{e}^{-\alpha t}}{-\alpha}\right]_0^x - \tfrac{1}{2} \int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t} \cos 2\omega t\, dt = \tfrac{1}{2\alpha} - \tfrac{\mathrm{e}^{-\alpha x}}{2\alpha} - \tfrac{1}{2} K_x,$$

avec $K_x = \int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t} \cos 2\omega t\, dt$. Une première intégration par parties donne :

$$K_x = \left[\mathrm{e}^{-\alpha t} \tfrac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right]_0^x + \int_0^x \alpha \mathrm{e}^{-\alpha t} \tfrac{\sin 2\omega t}{2\omega}\, dt = \tfrac{\mathrm{e}^{-\alpha x} \sin 2\omega x}{2\omega} + \tfrac{\alpha}{2\omega} H_x,$$

avec $H_x = \int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t} \sin 2\omega t\, dt$. Une seconde intégration par parties donne :

$$H_x = \left[-\mathrm{e}^{-\alpha t} \tfrac{\cos 2\omega t}{2\omega}\right]_0^x - \int_0^x \alpha \mathrm{e}^{-\alpha t} \tfrac{\cos 2\omega t}{2\omega}\, dt = \tfrac{1}{2\omega} - \tfrac{\mathrm{e}^{-\alpha x} \cos 2\omega x}{2\omega} - \tfrac{\alpha}{2\omega} K_x.$$

Notons :

$$K = \lim_{x \to +\infty} K_x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} \cos 2\omega t\, dt \quad \text{et} \quad H = \lim_{x \to +\infty} H_x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t} \sin 2\omega t\, dt,$$

qui convergent par majoration (même raisonnement que pour J ci-dessus). En passant à la limite dans les différentes égalités établies ci-dessus, on obtient $H = \frac{1}{2\omega} - \frac{\alpha}{2\omega} K = \frac{1}{2\omega} - \frac{\alpha}{2\omega} \frac{\alpha}{2\omega} H$, d'où $H = \frac{2\omega}{\alpha^2 + 4\omega^2}$, puis $K = \frac{\alpha}{\alpha^2 + 4\omega^2}$, et finalement $J = \frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2} K = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha^2 + 4\omega^2}\right) = \frac{2\omega^2}{\alpha(\alpha^2 + 4\omega^2)}$. □

Chapitre 5

Séries numériques

5.1 Notion de série

5.1.1 Exemple introductif

La question de départ, qui remonte aux mathématiques grecques, est celui du comportement d'une somme de N nombres u_n qui deviennent de plus en plus petits. Quand n croît (voire tend vers l'infini), chaque terme u_n décroît (voire tend vers 0) mais le nombre N de termes dans la somme augmente (voire tend vers l'infini). Qu'en est-il alors de la valeur de la somme ? tend-elle vers l'infini ? ou vers une valeur finie ? Prenons dans un premier temps tous les termes positifs pour simplifier (de sorte qu'il ne peut pas y avoir dans la somme de compensation entre des positifs et des négatifs). La petite exploration numérique suivante semble montrer que les situations peuvent être variées...

N	valeur de $S_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N}$	valeur de $T_N = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{N^2}$
1	1	1
2	3/2 = 1.5	5/4 = 1.25
3	11/6 $\simeq$ 1.83333333333333	49/36 $\simeq$ 1.36111111
4	25/12 $\simeq$ 2.08333333333333	205/144 $\simeq$ 1.42361111
5	137/60 $\simeq$ 2.28333333333333	5269/3600 $\simeq$ 1.46361111
6	49/20 $\simeq$ 2.45000000000000	5369/3600 $\simeq$ 1.491388888
7	363/140 $\simeq$ 2.59285714285714	266681/176400 $\simeq$ 1.51179705215420
8	761/280 $\simeq$ 2.71785714285714	1077749/705600 $\simeq$ 1.52742205215420
9	7129/2520 $\simeq$ 2.82896825396825	9778141/6350400 $\simeq$ 1.53976773116654
10	7381/2520 $\simeq$ 2.92896825396825	1968329/1270080 $\simeq$ 1.54976773116654
20	$\simeq$ 3.59773965714368	$\simeq$ 1.59616324391302
30	$\simeq$ 3.99498713092039	$\simeq$ 1.61215011760160
100	$\simeq$ 5.18737751763962	$\simeq$ 1.63498390018489
200	$\simeq$ 5.87803094812144	$\simeq$ 1.63994654601500
300	$\simeq$ 6.28266388029950	$\simeq$ 1.64160628289762
400	$\simeq$ 6.56992969117651	$\simeq$ 1.64243718924406
500	$\simeq$ 6.79282342999052	$\simeq$ 1.64293606551489
1000	$\simeq$ 7.48547086055035	$\simeq$ 1.64393456668156
2000	$\simeq$ 8.17836810361028	$\simeq$ 1.64443419182739
3000	$\simeq$ 8.58374988995919	$\simeq$ 1.64460078906428
4000	$\simeq$ 8.87139029979523	$\simeq$ 1.64468409809562
5000	$\simeq$ 9.09450885298444	$\simeq$ 1.64473408684689
10 000	$\simeq$ 9.78760603604438	$\simeq$ 1.64483407184806
100 000	$\simeq$ 12.0901461298634	$\simeq$ 1.64492406689823
200 000	$\simeq$ 12.7832908104296	$\simeq$ 1.64492906686073

5.1.2 Terminologie des séries

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels ou complexes. Posons pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$S_N = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_N = \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

- S_N s'appelle la *N-ième somme partielle* associée à la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. On introduit ainsi une nouvelle suite $(S_N)_{N\geq 0}$ de nombres réels ou complexes, dite *suite des sommes partielles* associée à $(u_n)_{n\geq 0}$.
- On appelle *série numérique* la donnée d'un couple formé par une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ et la suite de ses sommes partielles. On note cette série : $\sum_{n\geq 0} u_n$, ou plus simplement $\sum u_n$.
- L'élément u_n s'appelle n-ième terme, ou *terme général* de la série.

Ce vocabulaire reste valable pour une suite $(u_n)_{n\geq p}$ définie à partir d'un certain rang p ; on note $\sum_{n\geq p} u_n$ la série associée.

5.1.3 Convergence d'une série

Définitions. On dit qu'une série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$ *converge* lorsque la suite (S_N) de ses sommes partielles est convergente (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Dans ce cas, la limite de la suite (S_N) s'appelle la *somme* de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$. On la note : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Donc :

$$\text{pour une série convergente } \sum_{n\geq 0} u_n, \text{ on a : } \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}.$$

On dit qu'une série numérique *diverge* lorsqu'elle ne converge pas. On dit que deux séries numériques sont *de même nature* lorsqu'elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

► *Remarque.* La nature d'une série n'est pas modifiée lorsque l'on change l'indice de départ ; mais quand il y a convergence, la valeur de la somme peut être modifiée. [1]

Proposition (*Condition nécessaire de convergence*).
Si une série numérique converge, alors son terme général tend vers 0.
En d'autres termes, si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) converge vers 0.

Démonstration. Soit $\sum u_n$ une série convergente ; notons S sa somme. Si (S_n) désigne la suite des sommes partielles, on a $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. Comme (S_n) converge vers S, il est clair que $(S_n - S_{n-1})$ converge vers 0. □

► *Deux remarques importantes.*

1. Cette proposition indique qu'une série numérique $\sum u_n$ telle que la suite (u_n) ne converge pas vers 0 est nécessairement divergente. On dit alors qu'elle est *grossièrement divergente.*

2. Attention ! La condition est <u>nécessaire</u> mais <u>non suffisante</u>. Il existe des suites (u_n) convergeant vers 0 telles que la série $\sum u_n$ diverge. (cf. exemples ci-dessous)

---

1. Cela signifie que si $\sum_{n\geq 0} u_n$ est une série numérique, et $p \in \mathbb{N}$, alors, les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq p} u_n$ sont de même nature. Cette assertion résulte directement de l'égalité $\sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=p}^{N} u_n + \sum_{n=0}^{p-1} u_n$ pour tout $N \geq p$. Lorsqu'il y a convergence, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=p}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{p-1} u_n$.

5.1.4 Premiers exemples classiques

• **Série géométrique.** Fixons $z \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et posons $u_n = z^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ ainsi définie s'appelle la *série géométrique* de raison z.

La série géométrique $\sum_{n\geq 0} z^n$ est convergente si et seulement si $|z| < 1$,
et dans ce cas sa somme est $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

En effet : si $|z| \geq 1$, le terme général $u_n = z^n$ ne tend pas vers 0, donc la série est grossièrement divergente. Si $|z| < 1$, alors $S_N = \sum_{n=0}^{N} z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}$, donc $\lim\limits_N S_N = \frac{1}{1-z}$, donc $\sum_{n\geq 0} z^n$ converge de somme $\frac{1}{1-z}$.

• **Série harmonique.** Posons $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La série $\sum_{n\geq 1} u_n$ ainsi définie s'appelle la *série harmonique.*

La série harmonique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente (bien que son terme général tende vers 0).

En effet : Pour tout $N \geq 1$, on a la minoration $S_N = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{N} \ln(1+\frac{1}{k})$. Or, $\sum_{k=1}^{N} \ln(1+\frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^{N} \ln(\frac{k+1}{k}) = \sum_{k=1}^{N}(\ln(k+1) - \ln k) = \ln(1+N)$. Donc $S_N \geq \ln(1+N)$. Comme $\ln(1+N)$ tend vers $+\infty$ quand N tend vers $+\infty$, on en déduit que la suite $(S_N)_N$ diverge vers $+\infty$, et donc la série de terme général $\frac{1}{n}$ est divergente.

• **Série harmonique alternée**. Posons $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La série $\sum_{n\geq 1} u_n$ ainsi définie s'appelle la *série harmonique alternée.*

La série harmonique alternée $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, et sa somme est $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

En effet : $-\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = -\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \int_0^1 t^{k-1}\,dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^{n}(-t)^{k-1}\,dt = \int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,dt$. On scinde cette dernière intégrale en : $\int_0^1 \frac{1-(-t)^n}{1+t}\,dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt$. Or $\int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$, et par ailleurs $0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt \leq \int_0^1 t^n\,dt = \frac{1}{n+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,dt = 0$. On conclut que la suite (S_n) des sommes partielles converge vers $\ln 2$. Donc la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ est convergente et sa somme est $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2$.

• **Séries dites “téléscopiques”**. On désigne par ce terme familier des séries dont le terme général u_n peut s'exprimer sous la forme $u_n = v_{n+1} - v_n$ pour une certaine suite (v_n). On calcule alors les sommes partielles sous la forme :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N}(v_{n+1} - v_n) = v_1 - v_0 + v_2 - v_1 + v_3 - v_2 + \cdots + v_N - v_{N-1} + v_{N+1} - v_N = v_{N+1} - v_0.$$

On en déduit que, si la suite (v_n) converge vers une limite ℓ, alors la suites (S_N) converge vers $\ell - v_0$, et donc la série de terme général u_n est convergente et sa somme est $\ell - v_0$.

Par exemple, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente, de somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

En effet : Posons $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ pour tout $n \geq 1$. On remarque que $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Donc, pour $N \geq 1$, on a : $S_N = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = 1 - \frac{1}{N+1}$. La suite $(S_N)_{N\geq 1}$ converge donc vers 1.

5.1.5 Espace vectoriel des séries convergentes

► *Somme de deux séries, produit d'une série par un scalaire.* Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. Leur somme est la série de terme général $u_n + v_n$. Si de plus $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, le produit externe de $\sum u_n$ par λ est la série de terme général λu_n.

Proposition (*combinaison linéaire de séries convergentes*). Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques convergentes. Alors, pour tous scalaires λ, μ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge, et sa somme est :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Démonstration. On applique aux sommes partielles les résultats correspondants sur les suites. □

► *Conséquences.*

1. La somme d'une série convergente et d'une série divergente est nécessairement divergente. La somme de deux séries divergentes peut être convergente ou divergente

2. Les séries numériques réelles forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et les séries convergentes en forment un sous-espace vectoriel (idem sur $\mathbb{C}$).

3. Soit $\sum u_n$ une série complexe. Pour tout $n \geq 0$, notons $u_n = x_n + iy_n$ avec $x_n, y_n \in \mathbb{R}$. La série complexe $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries réelles $\sum x_n$ et $\sum y_n$ convergent. Dans ce cas, on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} y_n.$$

► *Commentaire.* Il est rare dans la pratique que l'on puisse faire un calcul direct de la somme d'une série convergente. La plupart des résultats que l'on va voir dans la suite permettent seulement de déterminer la nature d'une série. C'est une problématique très voisine de celle vue pour l'étude des intégrales impropres (il y a des raisons profondes à cela, voir plus loin en 5.4.1). Et comme pour les intégrales impropres, c'est le cas des séries positives, pour lesquelles il ne peut pas y avoir de compensation entre des termes de signes différents, qui est le plus facile.

5.2 Séries à termes réels positifs

5.2.1 Critère de majoration

Théorème (*fondamental*). Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles telles que, à partir d'un certain rang p, on ait : $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq p$.

(i) Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge, et dans ce cas : $0 \leq \sum_{n=p}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=p}^{+\infty} v_n$.

(ii) Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration. Rappelons d'abord (voir cours de première année) que, pour une suite réelle *croissante*, deux cas seulement peuvent se présenter : ou bien elle est majorée et alors elle converge, ou bien elle n'est pas majorée, et alors elle tend vers $+\infty$. Ceci étant, notons :

$$S_N = \sum_{n=p}^{N} u_n \ \text{ et } \ T_N = \sum_{n=p}^{N} v_n \ \text{ pour tout } N \geq p.$$

D'après l'hypothèse, les suites $(S_N)_{N\geq p}$ et $(T_N)_{N\geq p}$ sont *croissantes*, et vérifient $S_N \leq T_N$ pour tout $N \geq p$. Supposons que la série $\sum v_n$ converge. Cela signifie que la suite (T_N) converge. Elle est alors nécessairement majorée, donc la suite (S_N) est aussi majorée, et en appliquant le rappel, on déduit que la suite (S_N) est convergente. On conclut que la série $\sum u_n$ converge. Par passage à la limite dans les inégalités, on a $\lim_{N\to+\infty} S_N \leq \lim_{N\to+\infty} T_N$, ce qui achève de prouver (i). Le point (ii) s'en déduit par contraposition. □

Corollaire (*critère de domination*). Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs à partir d'un certain rang. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que l'on ait $0 \leq u_n \leq \alpha v_n$ pour tout entier $n \geq p$.

(i) Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Démonstration. Comme le produit d'une série convergente par un scalaire est une série convergente (cf. 5.1.5), il suffit d'appliquer le théorème précédent aux séries $\sum u_n$ et $\sum \alpha v_n$. □

Corollaire (*critère d'équivalence*). Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs à partir d'un certain rang. Si u_n et v_n sont équivalents au voisinage de ∞, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Démonstration. Par hypothèse, on a à partir d'un certain rang : $u_n = [1+\varepsilon_n]v_n$, avec (ε_n) suite convergeant vers 0. En particulier, pour n assez grand, $|\varepsilon_n| < \frac{1}{2}$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a : $-\frac{1}{2} < \varepsilon_n < \frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{2} < 1+\varepsilon_n < \frac{3}{2}$. Donc, à partir d'un certain rang, on a : $0 \leq \frac{1}{2}v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2}v_n$. On applique alors le corollaire précédent. □

5.2.2 Séries de Riemann

▶ *Définition.* On appelle série de Riemann une série de la forme $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, où α est un réel fixé.

Proposition. La série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. On raisonne en deux cas :

Si $\alpha \leq 1$, alors $n^\alpha \leq n$, donc $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} > 0$. Comme la série harmonique diverge comme on l'a vu en 5.1.4, on applique le point (ii) du théorème 5.2.1 pour conclure que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

Si $\alpha > 1$, posons $\beta = \alpha - 1 > 0$; définissons $a_n = \frac{1}{n^\beta}$ et $b_n = a_n - a_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$. Comme $\beta > 0$, on a : $a_{n+1} < a_n$ donc $b_n > 0$. Formons pour $N \geq 1$ la somme partielle

$S_N = \sum_{n=1}^{N} b_n = a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \cdots + a_N - a_{N+1} = 1 - \frac{1}{(N+1)^\beta}$. Comme $\beta > 0$, la suite (S_N) converge vers 1. Ainsi, la série $\sum b_n$ converge (et sa somme est 1). Or on peut vérifier [2] que :

$$b_n \underset{+\infty}{\sim} \beta \times \frac{1}{n^{\beta+1}}, \text{ d'où } \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\beta+1}} \underset{+\infty}{\sim} \beta^{-1} b_n.$$

Comme la série $\sum b_n$ converge, il en est de même de $\sum \beta^{-1} b_n$; il s'agit d'une série à termes réels positifs. On applique le second corollaire de 5.2.1 pour conclure que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente. $\square$

Corollaire (*règle de comparaison avec une série de Riemann*). Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs.

(i) S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors la série $\sum u_n$ converge.

(ii) S'il existe un réel $0 < \alpha \leq 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Démonstration. Traduisons d'abord $\lim_n n^\alpha u_n = 0$. Pour $\varepsilon = 1$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, on a : $0 \leq n^\alpha u_n < 1$, donc $0 \leq u_n < \frac{1}{n^\alpha}$. Comme $\alpha > 1$, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge d'après le théorème ci-dessus, et donc $\sum u_n$ converge d'après le point (i) du théorème 5.2.1.

Traduisons maintenant $\lim_n n^\alpha u_n = +\infty$. Pour $\varepsilon = 1$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que : pour tout $n \geq N_2$, on a : $n^\alpha u_n > 1$, donc $u_n > \frac{1}{n^\alpha}$. Comme $0 < \alpha \leq 1$, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge d'après le théorème ci-dessus, et donc $\sum u_n$ diverge d'après le point (ii) du théorème 5.2.1. $\square$

► *Un exemple d'application.*

Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. La série $\sum\limits_{n\geq 1} \exp[-(\ln n)^a]$ converge si et seulement si $a > 1$.

En effet : En effet, posons $u_n = \exp[-(\ln n)^a]$.

Si $a = 1$, alors $u_n = \frac{1}{n}$, donc $\sum u_n$ est la série harmonique ; on sait qu'elle diverge.

On suppose donc maintenant $a \neq 1$. En vue d'utiliser le corollaire ci-dessus, on forme : $n^\alpha u_n = \exp(\alpha \ln n - (\ln n)^a)$ pour un $\alpha > 0$. Or :

$$\lim_{n\to+\infty} (\alpha \ln n - (\ln n)^a) = \lim_{n\to+\infty} (\ln n)(\alpha - (\ln n)^{a-1}) = \begin{cases} -\infty \text{ si } a > 1 \\ +\infty \text{ si } a < 1 \end{cases}$$

Si $a > 1$, alors $\lim_n n^\alpha u_n = 0$ pour tout $\alpha > 0$. On applique à $\alpha = 2$ pour conclure avec le point (i) du corollaire précédent que $\sum u_n$ converge.

Si $a < 1$, alors $\lim_n n^\alpha u_n = +\infty$ pour tout $\alpha > 0$. On applique à $\alpha = 1$ pour conclure avec le point (ii) du corollaire précédent que $\sum u_n$ diverge.

► *Remarque.* Il est clair que, dans le point (i) du corollaire ci-dessus, on peut remplacer la condition $\lim_n n^\alpha u_n = 0$ pour un $\alpha > 1$ par la condition plus faible : il existe $\alpha > 1$ telle que la suite de réels positifs $(n^\alpha u_n)$ soit majorée.

2. On écrit $b_n = \frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta} = \frac{1}{n^\beta}\left[1 - (\frac{n}{n+1})^\beta\right] = \frac{1}{n^\beta}\left[1 - (1+\frac{1}{n})^{-\beta}\right]$. On utilise le D.L. : $(1+\frac{1}{n})^{-\beta} = 1 - \beta\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon_n$ avec $\lim_n \varepsilon_n = 0$. On déduit : $b_n = \frac{1}{n^\beta}\left[\beta\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\varepsilon_n\right] = \frac{\beta}{n^{\beta+1}}\left[1 - \frac{1}{\beta}\varepsilon_n\right]$

5.2.3 Règle de d'Alembert

Proposition. On considère une série réelle $\sum u_n$ telle que $u_n > 0$ à partir d'un certain rang. On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+$.

(i) Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Démonstration. Supposons d'abord $\ell < 1$. Choisissons un réel λ tel que $\ell < \lambda < 1$. Traduisons $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ell$. Pour $\varepsilon = \lambda - \ell > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\text{pour tout } n \geq N, \text{ on a } u_n > 0 \text{ et } \ell - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \varepsilon = \lambda.$$

Ainsi, pour $n \geq N$, on a : $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda$. On déduit : $\frac{u_{N+1}}{u_N} \times \frac{u_{N+2}}{u_{N+1}} \times \cdots \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \times \frac{u_n}{u_{n-1}} < \lambda^{n-N}$, d'où $\frac{u_n}{u_N} < \lambda^{n-N}$. Par suite, pour tout $n \geq N$, on a $u_n < (u_N\lambda^{-N})\lambda^n$. Or, comme $0 < \lambda < 1$, la série géométrique $\sum \lambda^n$ converge comme on l'a vu en 5.1.4. On applique le point (i) du premier corollaire de 5.2.1 pour conclure que $\sum u_n$ converge.

Pour montrer (ii), supposons maintenant $\ell > 1$. Choisissons un réel ε tel que $0 < \varepsilon < \ell - 1$. Traduisons $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ell$ pour ce ε ; il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\text{pour tout } n \geq N_0, \text{ on a : } u_n > 0 \text{ et } 1 < \ell - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \ell + \varepsilon,$$

et donc $u_{n+1} > u_n$. Ainsi, la suite (u_n) est croissante à partir du rang N_0. Elle est donc minorée par $u_{N_0} > 0$. Elle ne peut donc pas converger vers 0. D'après la proposition 5.1.3, la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente. □

▶ *Un exemple d'application.* La série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n = \frac{n!}{n^n}$ converge.

En effet, on a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$ qui tend vers $\exp(-1)$ quand $n \to +\infty$. Comme $e^{-1} < 1$, on conclut que la série $\sum u_n$ converge.

▶ *Remarques.*

(i) Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 1$, il se peut que $\sum u_n$ converge [par exemple pour $u_n = \frac{1}{n^2}$], ou qu'elle diverge [par exemple pour $u_n = \frac{1}{n}$]. De même lorsque $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ n'admet pas de limite.

(ii) Si $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = +\infty$, on a $u_{n+1} > u_n > 0$ à partir d'un certain rang, donc $\sum u_n$ est grossièrement divergente (comme dans la preuve du cas (ii) de la proposition ci-dessus).

5.2.4 Règle de Cauchy

Proposition. On considère une série réelle $\sum u_n$ telle que $u_n \geq 0$ à partir d'un certain rang. On suppose que la suite $(u_n^{\frac{1}{n}})$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+$.

(i) Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Démonstration. On raisonne comme dans la preuve de 5.2.3

• Supposons d'abord $\ell < 1$. Choisissons un réel λ tel que $\ell < \lambda < 1$. Comme dans la preuve de 5.2.3, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a : $0 \leq (u_n)^{\frac{1}{n}} < \lambda$, donc $0 \leq u_n < \lambda^n$. La série géométrique $\sum \lambda^n$ converge puisque $\lambda < 1$, donc $\sum u_n$ converge d'après le point (i) du théorème 5.2.1.

• Supposons maintenant $\ell > 1$. Comme dans la preuve de 5.2.3, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a : $(u_n)^{\frac{1}{n}} > 1$ donc $u_n > 1$. Dès lors, la suite (u_n) ne peut pas converger vers 0. D'après la proposition 5.1.3, la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente. □

▶ *Un exemple d'application.* La série $\sum\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$ converge, car $\lim_n\left(\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1$.

▶ *Remarques.*

(i) On peut montrer que si la règle de d'Alembert s'applique, alors la règle de Cauchy aussi, c'est-à-dire que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{1/n} = \ell$.

Néanmoins, il est souvent plus commode d'étudier la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ que la suite $(u_n^{1/n})$.

(ii) Réciproquement, on peut avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \ell \in \mathbb{R}_+$ sans que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ existe [3].

5.3 Séries numériques à termes quelconques

On dispose comme on vient de le voir de nombreux résultats techniques pour étudier les séries à termes réels positifs. Dans le cas général, on cherche à s'y ramener (voir ci-dessous en 5.3.1) comme on l'a fait pour les intégrales impropres en 4.2.4. Dans ce qui suit, on considère des séries numériques à termes réels ou complexes, et $|\cdot|$ désigne la valeur absolue dans le premier cas, le module dans le second cas.

5.3.1 Convergence absolue

Définition. Une série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite *absolument convergente* lorsque la série à termes réels positifs $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ est convergente.

Théorème. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série numérique. Si elle est absolument convergente, alors elle est convergente. De plus, on a dans ce cas : $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Démonstration. Supposons d'abord que $\sum u_n$ est à termes réels. Posons $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont des séries à termes positifs, qui vérifient $u_n^+ \leq |u_n|$ et $u_n^- \leq |u_n|$. Puisque par hypothèse la série $\sum |u_n|$ est convergente, on déduit de 5.2.1 que les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont convergentes. Mais par ailleurs $u_n = u_n^+ - u_n^-$, et donc la série $\sum u_n$ est convergente en tant que somme de deux séries convergentes (voir 5.1.5).

3. Soit (u_n) définie par $u_{2p} = u_{2p+1} = 2^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. D'une part $\lim_p (u_{2p})^{\frac{1}{2p}} = \lim_p (u_{2p+1})^{\frac{1}{2p+1}} = \sqrt{2}$, ce qui est suffisant pour conclure que $\lim_n (u_n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt{2}$ (résultat classique d'analyse réelle). D'autre part, la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ vaut alternativement 1 et 2, donc ne converge pas.

Supposons maintenant que u_n est à termes complexes. Notons $u_n = x_n + iy_n$ avec x_n et y_n dans $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $|x_n| \leq |u_n|$ et $|y_n| \leq |u_n|$. Puisque par hypothèse la série $\sum |u_n|$ est convergente, on déduit de 5.2.1 que les séries $\sum x_n$ et $\sum y_n$ sont convergentes. Comme on l'a vu dans la dernière remarque de 5.1.5, on en déduit que la série $\sum u_n$ est convergente.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a d'après l'inégalité triangulaire $\left|\sum_{n=0}^{N} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{N} |u_n|$, et l'on peut passer à la limite dans cette inégalité puisque les deux membres admettent une limite pour N tendant vers $+\infty$. $\square$

► *Remarque fondamentale et définition.*

Attention ! La réciproque du théorème ci-dessus est fausse : il existe des séries numériques qui sont convergentes mais non absolument convergentes. Une telle série est parfois appelée *semi-convergente.*

Exemple. La série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1} u_n$ avec $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente (voir 5.1.4). Comme $|u_n| = \frac{1}{n}$, la série $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ est la série harmonique, qui est divergente (voir 5.1.4). Ainsi la série harmonique alternée est convergente mais non absolument convergente.

Proposition. (*combinaison linéaire de séries absolument convergentes*). Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques absolument convergentes. Alors, pour tous scalaires λ, μ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ est absolument convergente.

Démonstration. On a : $|\lambda u_n + \mu v_n| \leq |\lambda|\,|u_n| + |\mu|\,|v_n|$. Par hypothèse, les séries $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$ convergent, donc la série $|\lambda| \sum |u_n| + |\mu| \sum |v_n|$ converge aussi d'après 5.1.5. L'inégalité $|\lambda u_n + \mu v_n| \leq |\lambda|\,|u_n| + |\mu|\,|v_n|$ implique donc, avec le théorème de majoration 5.2.1, que la série $\sum |\lambda u_n + \mu v_n|$ est convergente. Ceci signifie que la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ est absolument convergente. $\square$

► *Interprétation.* Puisque toute série absolument convergente est convergente, cette proposition signifie que les séries absolument convergentes forment un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des séries convergentes.

5.3.2 Séries (réelles) alternées

Le théorème suivant est un résultat pratique donnant des conditions suffisantes de convergence pour certains types particuliers de séries dont le terme général est un réel changeant de signe suivant la parité de n. Ce résultat, appelé règle des séries alternées, est en fait un cas particulier d'un résultat plus général (qui n'est pas au programme de ce cours) appelé la règle d'Abel.

Définition. Une série réelle $\sum u_n$ est dite *alternée* lorsque son terme général est de la forme $u_n = (-1)^n \alpha_n$ avec $\alpha_n \in \mathbb{R}_+$, ou bien de la forme $u_n = (-1)^{n+1} \alpha_n$ avec $\alpha_n \in \mathbb{R}_+$.

Théorème (*règle des séries alternées*). Soit (α_n) une suite de réels positifs. Si (α_n) est décroissante et convergente vers 0, alors la série alternée $\sum(-1)^n \alpha_n$ est convergente.

Démonstration. Posons $S_N = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\alpha_n$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. L'hypothèse que la suite (α_n) est décroissante implique que, pour tout entier $p \geq 0$, on a :

$$S_{2p+2} - S_{2p} = \alpha_{2p+2} - \alpha_{2p+1} \leq 0 \quad \text{et} \quad S_{2p+3} - S_{2p+1} = -\alpha_{2p+3} + \alpha_{2p+2} \geq 0.$$

Donc la suite $(S_{2p})_{p\geq 0}$ est décroissante et la suite $(S_{2p+1})_{p\geq 0}$ est croissante. De plus $S_{2p+1}-S_{2p} = -\alpha_{2p+1}$, et l'hypothèse que la suite (α_n) converge vers 0 implique alors que $\lim(S_{2p+1}-S_{2p}) = 0$. En d'autres termes, les suites $(S_{2p})_{p\geq 0}$ et $(S_{2p+1})_{p\geq 0}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers une même limite S. Ainsi, la suite (S_n) est telle que les deux suites extraites $(S_{2p})_{p\geq 0}$ et $(S_{2p+1})_{p\geq 0}$ convergent vers la même limite S. On sait (voir résultats de première année) qu'alors la suite (S_n) converge vers S. □

► *Une précision sur la preuve : majoration du reste dans la règle des séries alternées.* Reprenons toutes les notations introduites dans la preuve du théorème. Introduisons de plus la notation :

$$R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty}(-1)^n\alpha_n \qquad \text{pour tout } N \geq 0.$$

On a vu que la suite $(S_{2p})_{p\geq 0}$ converge vers S en décroissant et la suite $(S_{2p+1})_{p\geq 0}$ converge vers S en croissant ; il en résulte que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a :

$S_{2p+1} \leq S \leq S_{2p}$, donc $S_{2p+1} - S_{2p} \leq S - S_{2p} \leq 0$, c'est-à-dire $-\alpha_{2p+1} \leq R_{2p} \leq 0$,

$S_{2p+1} \leq S \leq S_{2p+2}$, donc $0 \leq S - S_{2p+1} \leq S_{2p+2} - S_{2p+1}$, d'où $0 \leq R_{2p+1} \leq \alpha_{2p+2}$.

On retiendra que : *lorsque la règle des séries alternées s'applique, on a de plus :* $|R_n| \leq \alpha_{n+1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

• **Séries de Riemann alternées.** Il s'agit des séries $\sum u_n$ où $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé.

- Si $\alpha \leq 0$, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.
- Si $\alpha > 1$, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est absolument convergente.
- Si $0 < \alpha \leq 1$, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente mais non absolument convergente.

En effet, le premier point est clair, le second découle de 5.2.2, et le troisième est une application de la règle des séries alternées. La *série harmonique alternée* correspond au cas $\alpha = 1$.

5.4 Quelques compléments

5.4.1 Comparaison entre séries et intégrales

Théorème (*Cas des fonctions réelles positives décroissantes*). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur un intervalle de la forme $I = [a, +\infty[$. On suppose que f est positive et décroissante sur I. Alors :

la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.

Démonstration. Comme $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t+a)\,dt$, et comme la nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes, il suffit de faire la démonstration pour $a = 0$. Définissons alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k), \quad I_n = \int_0^{n+1} f(t)\,dt \quad \text{et} \quad x_n = S_n - I_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^{n+1} f(t)\,dt.$$

Figure 1

Figure 2

• *Première étape.* On montre que la suite (x_n) est convergente en vérifiant qu'elle est croissante et majorée. Pour cela remarquons que, pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $t \in [k, k+1]$, on a : $0 \leq f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$, car f est décroissante. Donc :

$$0 \leq f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k). \qquad (\star)$$

Or : $x_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) - \sum_{k=0}^{n} \left(\int_k^{k+1} f(t)\,dt\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(t)\,dt\right)$. Chaque différence $\alpha_k := f(k) - \int_k^{k+1} f(t)\,dt$ est positive d'après $(\star)$, et comme $x_{n+1} = x_n + \alpha_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit que la suite (x_n) est croissante. On a de plus :

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(t)\,dt\right) = f(0) + \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\int_k^{k+1} f(t)\,dt + f(k+1)\right) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt.$$

Chaque différence $\beta_k := f(k+1) - \int_k^{k+1} f(t)\,dt$ étant négative d'après $(\star)$, on en déduit que : $x_n \leq f(0) - \int_n^{n+1} f(t)\,dt$. Toujours d'après $(\star)$, on a aussi : $-\int_n^{n+1} f(t)\,dt \leq -f(n+1)$. Donc finalement : $x_n \leq f(0) - f(n+1) \leq f(0)$. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (x_n) est majorée. On conclut que la suite (x_n) converge.

• *Deuxième étape.* On a donc par définition $S_n = x_n + I_n$. Comme la suite (x_n) converge, il est clair que la suite (S_n) converge si et seulement la suite (I_n) converge. Il reste à démontrer que la suite (I_n) converge si et seulement l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente. Pour cela, notons $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ pour tout réel $x > 0$. En particulier $I_n = F(n+1)$ pour tout entier $n \geq 1$.

Si $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge, on $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = L \in \mathbb{R}$, donc a fortiori $\lim\limits_{n \to +\infty} F(n) = L$, ce qui prouve que la suite (I_n) converge. Réciproquement, supposons que la suite (I_n) converge, c'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} F(n) = L \in \mathbb{R}$. Parce que f est positive, on a pour tout réel $x > 0$:

$$F(E(x)) = \int_0^{E(x)} f(t)\,dt \leq \int_0^x f(t)\,dt \leq \int_0^{E(x)+1} f(t)\,dt = F(E(x)+1).$$

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} E(x) = +\infty$, le membre de gauche et celui de droite de cet encadrement tendent tous les deux vers L quand x tend vers $+\infty$, donc il en est de même du terme central $F(x)$, ce qui prouve que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente.

• *Bilan et conclusion.* Dire que la série $\sum f(n)$ converge signifie que la suite des sommes partielles (S_n) converge, ce qui comme on vient de le voir équivaut à dire que la suite (I_n) converge, ou encore que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge. $\square$

► *Exemple.* Considérons l'application $t \to \frac{1}{t^\alpha}$, avec $\alpha \geq 0$ réel fixé. Elle est positive, continue par morceaux et décroissante sur $I = [1, +\infty[$. Donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est de même nature que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$. Ainsi les propositions 5.2.2 et 4.1.4, que l'on a montrées indépendamment, peuvent donc en fait se déduire l'une de l'autre.

5.4.2 Deux exemples d'applications : séries de Bertrand et constante d'Euler

Séries de Bertrand

On fixe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

On considère la série de terme général : $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$, (pour $n \geq 2$). Alors :

(i) si $\alpha > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ converge pour tout β,

(ii) si $\alpha < 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ diverge pour tout β,

(iii) si $\alpha = 1$, la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

Démonstration. Si $\alpha < 0$, la suite (u_n) tend vers $+\infty$ donc la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente. Si $\alpha = 0$ et $\beta < 0$, la conclusion est la même. On suppose donc maintenant que $\alpha > 0$ ou ($\alpha = 0$ et $\beta \geq 0$). La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ est alors décroissante pour x assez grand (il suffit pour le vérifier de regarder le signe de la dérivée f'). Le résultat se déduit alors directement du théorème ci-dessus et du résultat vu en 4.2.3. □

Constante d'Euler

La suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)_{n\geq 1}$ est convergente ; sa limite γ est appelée la constante d'Euler.

Démonstration. Soit $I = [1, +\infty[$ et $f : I \to \mathbb{R}$ la fonction continue positive décroissante sur I définie par $f(t) = \frac{1}{t}$. Notons g l'application $[0, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ définie par $g(t) = f(t+1) = \frac{1}{t+1}$. Comme dans la preuve du théorème ci-dessus, considérons pour tout $n \geq 1$:

$$x_n := \sum_{k=0}^{n} g(k) - \int_0^{n+1} g(t)\, dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \int_0^{n+1} \frac{1}{t+1}\, dt = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \int_1^{n+2} \frac{1}{t}\, dt,$$

que l'on réécrit pour tout $n \geq 1$:

$$x_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\, dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^{n} \frac{1}{t}\, dt - \int_n^{n+1} \frac{1}{t}\, dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n - \big(\ln(n+1) - \ln n\big).$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(\ln(n+1) - \ln n\big) = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1 + \frac{1}{n}) = 0$ et que la suite (x_n) converge (voir la preuve du théorème ci-dessus), on conclut que la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n\right)$ est convergente. □

► *Commentaire.* La constante d'Euler :

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} (1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \cdots + \tfrac{1}{n} - \ln n) = \lim_{n\to+\infty} (\sum_{k=1}^{n} \tfrac{1}{k} - \ln n)$$

joue un rôle très important dans de nombreux problèmes mathématiques. Une valeur approchée de γ est $0,57722...$. La question de savoir si γ est ou non rationnel est encore ouverte aujourd'hui !

Résumé pratique sur la comparaison entre séries et intégrales	
La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge lorsque la suite (S_N) des sommes partielles $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ tend vers une limite réelle finie pour N tendant vers $+\infty$. La valeur de cette limite est la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ de la série.	L'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge lorsque la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ tend vers une limite réelle finie pour x tendant vers $+\infty$. La valeur de cette limite est la valeur $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ de l'intégrale.
Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout n, et si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.	Si $0 \leq f(t) \leq g(t)$, et si l'intégrale $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.
Si $u_n \sim v_n$ avec u_n et v_n positifs, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.	Si $f \sim_{+\infty} g$ avec f, g positives, alors les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ sont de même nature.
La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.	L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
La série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, ou si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.	L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, ou si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.
Si une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente, et l'on a : $\lvert \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \rvert \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \lvert u_n \rvert$.	Si une intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ est absolument convergente, alors elle est convergente et l'on a : $\lvert \int_a^{+\infty} f(t)\,dt \rvert \leq \int_a^{+\infty} \lvert f(t) \rvert\,dt$.

5.4.3 Produit de Cauchy de deux séries

Définition. Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries numériques. On appelle *série produit* (ou *produit de Cauchy*) de ces deux séries la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ de terme général :

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_n v_0 = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} = \sum_{p+q=n} u_p v_q.$$

Lemme. Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries réelles à termes positifs. Si les deux convergent, alors leur série produit $\sum_{n\geq 0} w_n$ converge, et sa somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\Big).$$

Démonstration. Considérons les sommes partielles : $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$, $W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$.
La suite (U_n) est croissante puisque chaque u_k est positif, et elle converge vers une limite $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in \mathbb{R}_+$ puisque par hypothèse la série $\sum u_n$ converge. De même la suite (V_n) converge en croissant vers $V = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \in \mathbb{R}_+$. Il en résulte que la suite $(U_n V_n)$ converge en croissant vers UV.
Remarquons que $U_n V_n = \sum_{0\leq p,q\leq n} u_p v_q$. Par ailleurs, $W_n = \sum_{k=0}^{n} \Big(\sum_{p+q=k} u_p v_k\Big) = \sum_{p+q\leq n} u_p v_q$.
D'une part : $(p+q \leq n)$ implique $(p \leq n$ et $q \leq n)$, donc chaque terme de la somme W_n figure dans la somme $U_n V_n$; comme tous les termes sont positifs, on conclut que $W_n \leq U_n V_n$.
D'autre part : $(p \leq n$ et $q \leq n)$ implique $(p+q \leq 2n)$, donc de la même façon : $U_n V_n \leq W_{2n}$.

En résumé :

$$W_n \leq U_n V_n \leq W_{2n} \qquad (\star)$$

Puisque la suite $(U_n V_n)$ est majorée par UV, il résulte de $(\star)$ que la suite (W_n) est majorée. Mais la suite (W_n) est aussi croissante, car chaque w_k est positif. On conclut que (W_n) converge. Soit W sa limite dans $\mathbb{R}_+$. La suite (W_{2n}), qui est une suite extraite de (W_n) converge donc aussi vers W. On déduit alors de $(\star)$ que $W = UV$. $\square$

Théorème. Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries numériques. Si les deux sont absolument convergentes, alors leur série produit $\sum_{n\geq 0} w_n$ est absolument convergente, et sa somme vaut :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\big)\big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\big).$$

Démonstration. On raisonne en deux étapes.

• Notons $\sum w_n$ la série produit de $\sum u_n$ et $\sum v_n$, dont le terme général est par définition $w_n = \sum\limits_{p+q=n} u_p v_q$. Notons $\sum x_n$ la série produit de $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$, définie par $x_n = \sum\limits_{p+q=n} |u_p v_q|$. Par hypothèse, les séries positives $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$ convergent, donc en appliquant le lemme précédent, la série $\sum x_n$ converge. Or par l'inégalité triangulaire :

$$0 \leq |w_n| = \Big|\sum_{p+q=n} u_p v_q\Big| \leq \sum_{p+q=n} |u_p||v_q| = x_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On peut donc appliquer le critère de majoration 5.2.1 sur les séries à termes réels positifs pour conclure que la série $\sum |w_n|$ converge, c'est-à-dire que la série $\sum w_n$ est absolument convergente.

• On introduit pour les sommes partielles les notations suivantes :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, \qquad V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k, \qquad W_n = \sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=0}^{n}\big(\sum_{p+q=k} u_p v_q\big) = \sum_{p+q\leq n} u_p v_q.$$

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k|, \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} |v_k|, \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{p+q\leq n} |u_p||v_q|.$$

En particulier le lemme précédent se traduit par : $\lim\limits_{n\to+\infty} (A_n B_n - C_n) = 0$. On calcule :

$$U_n V_n - W_n = \sum_{0\leq p,q\leq n} u_p v_q - \sum_{p+q\leq n} u_p v_q = \sum_{(p,q)\in\Delta_n} u_p v_q,$$

où l'on a noté $\Delta_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2\,;\, 0 \leq p \leq n,\ 0 \leq q \leq n,\ p+q > n\}$. De la même façon :

$$A_n B_n - C_n = \sum_{(p,q)\in\Delta_n} |u_p||v_q|.$$

Par inégalité triangulaire : $|U_n V_n - W_n| = \Big|\sum\limits_{(p,q)\in\Delta_n} u_p v_q\Big| \leq \sum\limits_{(p,q)\in\Delta_n} |u_p||v_q| = A_n B_n - C_n$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} (A_n B_n - C_n) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_n V_n - W_n) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = (\lim\limits_{n\to+\infty} U_n)(\lim\limits_{n\to+\infty} V_n)$, ce qui se traduit : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\big)\big(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n\big)$ et achève la preuve du théorème [4]. $\square$

4. On peut améliorer ce théorème en montrant que la série produit reste convergente si l'on suppose seulement que l'une des deux séries données est absolument convergente, l'autre étant simplement supposée convergente (théorème de Mertens).

▶ *Exemple important : exponentielle.* Pour tout $x \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ est absolument convergente (c'est clair par la règle de d'Alembert). Donc elle converge ; notons sa somme :

$$\exp x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Pour deux nombres complexes x et y, la série produit de $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{y^n}{n!}$ a pour terme général :

$$w_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!} \frac{y^{n-p}}{(n-p)!} = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^p y^{n-p} = \frac{1}{n!}(x+y)^n.$$

D'après le théorème précédent, cette série produit est absolument convergente, et on a :

$$\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}\Big) = (\exp x)(\exp y)$$

Chapitre 6

Séries entières

6.1 Convergence des séries entières

6.1.1 Disques dans $\mathbb{C}$ et intervalles dans $\mathbb{R}$

Conformément au programme, ce chapitre est consacré à l'étude des séries entières d'une variable *complexe*, et s'applique donc en particulier aux séries entières d'une variable *réelle*. Les notions de disque dans $\mathbb{C}$ et d'intervalle dans $\mathbb{R}$, rappelées ci-dessous, vont jouer un rôle primordial.

► Pour "mesurer" la proximité entre deux réels, on utilise la distance définie par la valeur absolue, et la notion d'intervalle qui lui est attachée ; pour $a, x \in \mathbb{R}$ et $R \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$|x-a| < R \iff x \in \,]a-R, a+R[\,, \qquad |x-a| \leq R \iff x \in [a-R, a+R]\,.$$

► Dans le cas complexe, il suffit de remplacer la valeur absolue par le module, et donc la notion d'intervalle par la notion de disque (ouvert ou fermé) ; pour $a, z \in \mathbb{C}$ et $R \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$|z-a| < R \iff z \in D(a,R), \qquad |z-a| \leq R \iff z \in \overline{D}(a,R).$$

Figure 1

Figure 2

6.1.2 Rayon de convergence d'une série entière

Définition. On appelle *série entière* une série de la forme $\sum a_n z^n$, où (a_n) est une suite de nombres complexes fixée, et où z varie dans $\mathbb{C}$.

Le premier problème qui se pose, pour une telle série entière est de déterminer son *domaine de convergence*, c'est-à-dire l'ensemble X des $z \in \mathbb{C}$ tels que la série de nombres complexes $\sum a_n z^n$ est convergente. La réponse est donnée par le théorème suivant.

Théorème (*fondamental*). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Il existe un unique élément R qui est, soit un réel positif, soit $+\infty$, tel que l'on ait :

(i) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente, et donc convergente.

(ii) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente.

Démonstration. Soit E l'ensemble des réels $\rho \geq 0$ tels que la suite $(a_n \rho^n)$ soit bornée. Il est clair que $0 \in E$ et que, si $\rho \in E$, alors $[0, \rho] \subseteq E$. Il en résulte que E est un intervalle de $\mathbb{R}_+$ contenant 0. Notons R la borne supérieure de E dans $\mathbb{R}_+$ lorsque E est majorée, et $R = +\infty$ lorsque $E = [0, +\infty[$. On a par définition $[0, R[\subseteq E \subseteq [0, R]$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. Il existe $\rho \in E$ tel que $0 \leq |z| < \rho < R$. La suite $(a_n \rho^n)$ est bornée. Il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|a_n \rho^n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On déduit que :

$$|a_n z^n| = \left| a_n \rho^n \left(\frac{z}{\rho} \right)^n \right| \leq M \left(\frac{|z|}{\rho} \right)^n.$$

Or comme $0 \leq \frac{|z|}{\rho} < 1$, la série géométrique $\sum (\frac{|z|}{\rho})^n$ est convergente, donc la relation de domination ci-dessus implique que la série $\sum |a_n z^n|$ converge. Ceci prouve que R vérifie (i).

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > R$. Alors $|z| \notin E$, donc la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée, ce qui implique que la série $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente, et prouve que R vérifie (ii).

Il reste à établir l'unicité de R. Supposons qu'il existe deux réels R_1 et R_2 satisfaisant les conditions (i) et (ii). Si $R_1 < R_2$, le réel $\rho = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$ vérifie $0 \leq \rho < R_2$, de sorte que la série $\sum a_n \rho^n$ est absolument convergente, mais il vérifie aussi $\rho > R_1$, de sorte que la suite $(a_n \rho^n)$ n'est pas bornée. Les deux conditions sont incompatibles, d'où une contradiction. On conclut de même si $R_1 > R_2$, ce qui achève la preuve. $\square$

Définition. L'élément R déterminé par ce théorème est appelé le *rayon de convergence* de la série entière.

• Dire que $R = 0$ signifie que la série entière ne converge pour aucune valeur non-nulle de z, c'est-à-dire que son domaine de convergence X est réduit à $\{0\}$.

• Au contraire, dire que $R = +\infty$ signifie qu'elle converge (et même absolument) pour tout $z \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire que son domaine de convergence X est $\mathbb{C}$ tout entier.

• Supposons enfin que $0 < R < +\infty$. Considérons dans le plan complexe le disque ouvert de centre 0 et de rayon R :

$$D(0, R) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| < R\}.$$

La série $\sum a_n z^n$ converge absolument en tout point de $D(0, R)$, et diverge en tout point extérieur au disque fermé :

$$\overline{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| \leq R\}.$$

Mais le théorème ne dit rien sur ce qui se passe sur le cercle :

$$C(0, R) = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = R\}.$$

Il peut contenir à la fois des points $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels la série $\sum a_n z^n$ converge et d'autres pour lesquels elle diverge.

Disque de convergence

Donnons immédiatement deux exemples où l'on peut calculer la rayon de convergence en utilisant seulement la définition.

- ► Considérons la série entière $\sum e^{-\sqrt{n}} z^n$. Cherchons son rayon de convergence R.

  On a $|e^{-\sqrt{n}} z^n| = \exp(-\sqrt{n} + n \ln |z|) = \exp[\sqrt{n}(\sqrt{n} \ln |z| - 1)]$.

  Supposons $|z| > 1$; donc $\ln |z| > 0$, ce qui implique que $|e^{-\sqrt{n}} z^n|$ tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$. On a donc nécessairement $\sum e^{-\sqrt{n}} z^n$ divergente. Ainsi la série $\sum e^{-\sqrt{n}} z^n$ diverge pour tout z tel que $|z| > 1$, ce qui prouve d'après le point (i) du théorème que $|z| \geq R$. Donc $R \leq 1$.

  Supposons $|z| < 1$; donc $\ln |z| < 0$, ce qui implique que $|e^{-\sqrt{n}} z^n|$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. En particulier, la suite $(e^{-\sqrt{n}} z^n)$ est bornée. Ce qui implique d'après le point (ii) du théorème que $|z| \leq R$. Donc $1 \leq R$. On conclut finalement que $R = 1$.

- ► Considérons la série entière $\sum (\sin n) z^n$. Cherchons son rayon de convergence R.

  On a $|(\sin n) z^n| \leq |z|^n$. Si $|z| < 1$, la série géométrique de raison $|z|$ est convergente. Le critère de majoration sur les séries à termes positifs assure donc que la série de terme général $|(\sin n) z^n|$ est convergente. Ainsi la série de terme général $(\sin n) z^n$ est absolument convergente pour tout z tel que $|z| < 1$. Ceci prouve que $1 \leq R$. Prenons maintenant $z = 1$. La série $\sum \sin n$ diverge car son terme général ne tend pas vers 0. Ainsi, on a trouvé le point $z = 1$ en lequel la série entière $\sum \sin n z^n$ est divergente, ce qui suffit à prouver que $R \leq 1$. On conclut finalement que $R = 1$.

Remarque. Revenons sur la preuve du théorème fondamental ci-dessus ; il est important de noter qu'elle repose uniquement sur l'argument suivant (connu sous le nom de lemme d'Abel et utile dans beaucoup d'autres situations) :

> *Lemme d'Abel.* Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Si ρ est un réel strictement positif tel que la suite $(a_n \rho^n)$ est bornée, alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout z tel que $|z| < \rho$.

6.1.3 Méthodes de calcul du rayon de convergence

Proposition (*calcul du rayon de convergence par comparaison*).
Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières, de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.
– Majoration : si $|a_n| \leq |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors $R_b \leq R_a$.
– Domination : s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|a_n| \leq M|b_n|$ à partir d'un certain rang, alors $R_b \leq R_a$.
– Equivalence : si $|a_n| \sim |b_n|$ pour n tendant vers l'infini, alors $R_a = R_b$.

Démonstration. Montrons le premier point. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_b$. D'après le théorème 6.1.2, la série $\sum b_n z^n$ est absolument convergente. Or par hypothèse, on a pour n assez grand $|a_n| \leq |b_n|$, donc $|a_n z^n| \leq |b_n z^n|$. On en déduit avec le théorème 5.2.1 que la série $\sum |a_n z^n|$ est convergente, ce qui, en réappliquant le théorème 6.1.2, implique que $|z| \leq R_a$. On a ainsi prouvé que $[0, R_b[\subseteq [0, R_a[$, c'est-à-dire $R_b \leq R_a$. Le second point se déduit du premier en considérant la série $\sum M b_n z^n = M \sum b_n z^n$ au lieu de $\sum b_n z^n$. Le troisième point se démontre comme le premier en remplaçant l'usage du théorème 5.2.1 par celui du second corollaire de 5.2.1. □

Proposition (*calcul du rayon de convergence en utilisant la règle de d'Alembert*).
Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On suppose que $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et que :

$$\lim_{n\to+\infty} |\tfrac{a_{n+1}}{a_n}| = \ell, \quad \text{avec} \quad \ell \in \mathbb{R}_+ \quad \text{ou} \quad \ell = +\infty.$$

Alors le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\ell}$, (avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$).

Démonstration. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z| = \ell|z| \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Si $|z| < \frac{1}{\ell}$, alors $\ell|z| < 1$, donc en appliquant la règle de d'Alembert 5.2.3, la série à termes réels positifs $\sum |a_n z^n|$ est convergente. Si $|z| > \frac{1}{\ell}$, on déduit de même que $\sum |a_n z^n|$ est divergente. Ainsi la série entière $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour $|z| < \frac{1}{\ell}$ et non absolument convergente pour $|z| > \frac{1}{\ell}$; cela prouve avec le théorème 6.1.2 que le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$ est $R = \frac{1}{\ell}$. □

► *Remarques.*

1. Lorsque $|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$ n'admet pas de limite finie ou infinie pour n tendant vers $+\infty$, cette proposition est inapplicable. Par exemple pour la série entière $\sum (\sin n) z^n$ étudiée par d'autres méthodes précédemment.

2. Chercher à appliquer cette proposition pour des séries entières "lacunaires" (du type $\sum a_{2n} z^{2n}$, ou $\sum a_{2n+1} z^{2n+1}$, ou $\sum a_{\sigma(n)} z^{\sigma(n)}$) nécessite des précautions dans la mesure où il est faux pour de telles séries que tous les a_n sont non-nuls à partir d'un certain rang (des exemples seront vus en exercices).

► *Un exemple d'application à connaître.* Toute série entière $\sum a_n z^n$ où a_n est de la forme $F(n)$ pour une certaine fraction rationnelle non-nulle F est de rayon de convergence égale à 1.

> *En effet.* Notons $F(X) = \frac{\alpha_p X^p + \cdots + \alpha_1 X + \alpha_0}{\beta_q X^q + \cdots + \beta_1 X + \beta_0}$ avec p le degré du polynôme du numérateur et q le degré du polynôme du dénominateur (et donc $\alpha_p \in \mathbb{C}^*$ et $\beta_q \in \mathbb{C}^*$). D'après le point (ii) de la proposition 3.1.2, la suite de terme général $a_n = F(n)$ vérifie $|a_n| \sim |\frac{\alpha_p}{\beta_q}| n^{p-q}$. D'après la première proposition 6.1.3 ci-dessus, le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal au rayon de convergence de la série entière $\sum n^{p-q} z^n$. Pour cette dernière, on applique la règle de d'Alembert ci-dessus ; on a :
>
> $$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)^{p-q}}{n^{p-q}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{p-q} = 1, \text{ donc } \; R = 1.$$

Ainsi par exemple les séries entières $\sum z^n$, $\sum n z^n$, $\sum (3n^2 + 5n - 2) z^n$, $\sum \frac{1}{n} z^n$, $\sum \frac{n^2+3n-1}{n-3} z^n$, $\sum \frac{2n}{n^3-1} z^n$,... ont toutes pour rayon de convergence 1.

On termine par un dernier exemple de calcul de rayon de convergence, appliqué à une notion qui sera utile par la suite, celle de série dérivée.

Définition et proposition (*calcul du rayon de convergence de la série dérivée*). On appelle série dérivée d'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ la série $\sum_{n\geq 0} n a_n z^{n-1}$. Ces deux séries entières ont le même rayon de convergence.

Démonstration. Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Soit R' le rayon de convergence de $\sum n a_n z^{n-1}$. Il est clair que la série $\sum n a_n z^{n-1}$ converge si et seulement si la série $\sum n a_n z^n = z \times \sum n a_n z^{n-1}$ converge. Donc R' est aussi le rayon de convergence de la série entière $\sum n a_n z^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|a_n z^n| \leq |n a_n z^n|$. Donc si la série $\sum n a_n z^n$ converge absolument en un point z, il en est de même de la série $\sum a_n z^n$. Ceci prouve que $R' \leq R$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $0 \leq |z| < R$. Il existe un réel $r \geq 0$ tel que $|z| < r < R$. Dès lors, on a :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ |n a_n z^n| = |a_n r^n| \times n \left(\tfrac{|z|}{r}\right)^n \ \text{ avec } \begin{cases} (a_n r^n) \text{ suite bornée}, & \text{car } 0 \leq r < R \\ \lim\limits_{n \to +\infty} n \left(\tfrac{|z|}{r}\right)^n = 0, & \text{car } 0 \leq \tfrac{|z|}{r} < 1. \end{cases}$$

Il en résulte que $\lim\limits_{n \to +\infty} n a_n z^n = 0$, ce qui prouve que $|z| \leq R'$. On a ainsi montré que tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$ vérifie aussi $|z| \leq R'$. Ceci implique $R \leq R'$. Et finalement $R = R'$. □

6.2 Fonctions définies par la somme d'une série entière

► *Premier exemple préliminaire : série exponentielle.*

Considérons la série entière $\sum \frac{1}{n!} z^n$. Le rapport $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}$ tend vers la limite $\ell = 0$ quand $n \to +\infty$. Donc, d'après la proposition 6.1.2 :

le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{1}{n!} z^n$ est $+\infty$.

Il résulte alors du théorème 6.1.2 que la série $\sum \frac{1}{n!} z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$, et donc que sa somme définit une fonction $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ appelée la fonction exponentielle complexe, notée e^z ou $\exp z$. On retiendra que :

$$\boxed{\text{pour tout } z \in \mathbb{C},\ \ \mathrm{e}^z = \exp z = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{n!} z^n = 1 + z + \tfrac{z^2}{2} + \tfrac{z^3}{6} + \tfrac{z^4}{24} + \cdots}$$

Rappelons que l'on a déjà démontré en 5.4.3 que :

$$\boxed{(\exp z)(\exp z') = \exp(z + z') \text{ pour tous } z, z' \in \mathbb{C}.}$$

► *Second exemple préliminaire : série entière géométrique.*

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Considérons la série entière $\sum a^n z^n$. C'est la série géométrique $\sum (az)^n$ de raison az, dont on sait qu'elle est convergente si et seulement si $|az| < 1$, et que sa somme est alors $\frac{1}{1-az}$. On en déduit que :

le rayon de convergence de la série entière $\sum a^n z^n$ est $\frac{1}{|a|}$.

Il résulte alors du théorème 6.1.2 que la série $\sum a^n z^n$ converge absolument pour tout z tel que $|z| < \frac{1}{|a|}$, et donc que sa somme définit une fonction $D(0, \frac{1}{|a|}) \to \mathbb{C}$.

Les cas $a = 1$ et $a = -1$ sont particulièrement utiles dans la pratique. On retiendra que :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{pour tout } z \in D(0,1), & \frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots \\ \text{pour tout } z \in D(0,1), & \frac{1}{1+z} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 + \cdots \end{array}}$$

► *D'une façon générale.*

Considérons une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, avec $a_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit R son rayon de convergence. On définit donc une fonction $f : D(0,R) \to \mathbb{C}$ en prenant pour valeur de $f(z)$ la valeur de la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in D(0,R)$.

Considérons en particulier une série entière réelle $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$, avec $a_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit R son rayon de convergence. On introduit la fonction réelle d'une variable réelle :

$$\begin{aligned} f :]-R, R[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

On étudie dans les paragraphes suivants la continuité et la dérivabilité d'une telle fonction. [1]

6.2.1 Continuité

Proposition. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière réelle. Soit R son rayon de convergence, que l'on suppose non-nul. On considère l'application $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors f est continue sur l'intervalle $]-R, R[$.

Démonstration. Il s'agit de montrer que f est continue en tout point $x_0 \in]-R, R[$. Fixons donc un point $x_0 \in]-R, R[$ quelconque. Il existe un réel $t \in]0, R[$ tel que $|x_0| < t$. Pour tout $x \in]-t, t[$, on calcule :

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (x^n - x_0^n).$$

Or pour tout $n \geq 1$, on a $x^n - x_0^n = (x - x_0) P_n(x)$, où l'on a posé $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k$, d'où :

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \sum_{n=1}^{+\infty} a_n P_n(x).$$

Puisqu'on a à la fois $|x| < t$ et $|x_0| < t$, on peut majorer pour tout $n \geq 1$:

$$|a_n P_n(x)| \leq |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} |x|^{n-1-k} |x_0|^k < |a_n| \sum_{k=0}^{n-1} t^{n-1} = n|a_n| t^{n-1}.$$

Comme $|t| < R$, il résulte du théorème 6.1.2 que la série $\sum a_n t^n$ est absolument convergente. Donc d'après la troisième proposition de 6.1.3, la série $\sum n a_n t^{n-1}$ est également absolument convergente. La majoration ci-dessus implique alors d'après le théorème 5.2.1 que la série de terme général $|a_n P_n(x)|$ converge. On conclut avec le théorème 5.3.1 que :

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |x - x_0| \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n P_n(x)| \leq |x - x_0| \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n |a_n| t^{n-1} \right).$$

Si l'on note M le réel positif $\sum_{n=1}^{+\infty} n|a_n| t^{n-1}$, on a ainsi montré que :

$$\text{pour tout } x \in]-t, t[, \text{ on a } |f(x) - f(x_0)| \leq M |x - x_0|.$$

Il en résulte que $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, ce qui est signifie que f est continue en x_0. □

1. Le fait que l'on se restreigne au cas réel est une simplification due aux contenus des programmes de ce cours et de ceux qui l'ont précédé, mais la proposition 6.2.1 ainsi que sa preuve se généralisent sans aucun problème au cas où $f : D(0,R) \to \mathbb{C}$, et le théorème 6.2.2 s'étend tout aussi aisément au cas où $f :]-R, R[\to \mathbb{C}$.

6.2.2 Dérivabilité, primitivation

Théorème. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière réelle. Soit R son rayon de convergence, que l'on suppose non-nul. On considère l'application $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors :

(i) f est dérivable sur l'intervalle $]-R, R[$, et sa dérivée est :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{pour tout } x \in]-R, R[.$$

(ii) Plus généralement, f est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et l'on a :

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \tfrac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} \quad \text{pour tout } z \in]-R, R[\text{ et tout } k \in \mathbb{N}.$$

(iii) En particulier, pour tout entier $k \geq 0$, on a : $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$.

Explicitement, on a donc pour tout $x \in]-R, R[$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\
f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots \\
f''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2a_2 + 6a_2 x + 12 a_3 x^2 + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \cdots
\end{aligned}$$

etc...

Démonstration. Puisqu'une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence d'après la troisième proposition de 6.1.3, on peut considérer la fonction $g :]-R, R[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$. Il s'agit de montrer que f est dérivable en tout point $x_0 \in]-R, R[$ et vérifie $f'(x_0) = g(x_0)$. Fixons donc un point $x_0 \in]-R, R[$ quelconque. Il existe un réel $t \in]0, R[$ tel que $|x_0| < t$. On a vu dans la preuve de la proposition 6.2.1 que pour tout $x \in]-t, t[$:

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \sum_{n=1}^{+\infty} a_n P_n(x), \ \text{ où l'on a posé } P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-1-k} x_0^k,$$

et donc pour $x \neq x_0$:

$$\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - g(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n (P_n(x) - n x_0^{n-1}) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n (P_n(x) - n x_0^{n-1}).$$

On calcule $P_n(x) - n x_0^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x_0^k (x^{n-1-k} - x_0^{n-1-k}) = \sum_{p=0}^{n-1} x_0^{n-1-p} (x^p - x_0^p)$

Puisqu'on a à la fois $|x| < t$ et $|x_0| < t$, on peut majorer pour tout $p \geq 1$:

$$|x^p - x_0^p| = |x - x_0| \left| \sum_{j=0}^{p-1} x^{p-1-j} x_0^j \right| \leq |x - x_0| \sum_{j=0}^{p-1} t^{p-1-j} t^j = |x - x_0| p t^{p-1}.$$

donc :

$$|P_n(x) - n x_0^{n-1}| \leq \sum_{p=1}^{n-1} |x_0|^{n-1-p} |x - x_0| p t^{p-1} < \sum_{p=1}^{n-1} t^{n-1-p} |x - x_0| p t^{p-1} = |x - x_0| \underbrace{\left[\sum_{p=1}^{n-1} p \right]}_{\frac{n(n-1)}{2}} t^{n-2},$$

et finalement : $|a_n (P_n(x) - n x_0^{n-1})| \leq \frac{1}{2} |x - x_0| n(n-1) |a_n| t^{n-2}$.

Comme $|t| < R$, il résulte du théorème 6.1.2 que la série $\sum a_n t^n$ est absolument convergente. Donc d'après la troisième proposition de 6.1.3, les séries $\sum n a_n t^{n-1}$ et $\sum n(n-1) a_n t^{n-2}$ sont également absolument convergentes. La majoration ci-dessus implique alors d'après le théorème 5.2.1 que la série de terme général $|a_n(P_n(x) - n x_0^{n-1})|$ converge. On conclut avec 5.3.1 que :

$$|\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - g(x_0)| \leq |x - x_0| \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n(P_n(x) - n x_0^{n-1})| \leq |x - x_0| \tfrac{1}{2} \left(\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)|a_n| t^{n-2} \right).$$

Si l'on note K le réel positif $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} n(n-1)|a_n| t^{n-2}$, on a ainsi montré que :

$$\text{pour tout } x \in]-t, t[\text{, on a } |\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - g(x_0)| \leq K|x - x_0|.$$

Il en résulte que $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = g(x_0)$, ce qui signifie que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = g(x_0)$. Ceci achève la preuve du point (i). Le point (ii) en découle par récurrence (à mettre en forme à titre d'exercice). Le point (iii) s'obtient en appliquant (ii) avec $x = 0$. □

Corollaire. Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière réelle. Soit R son rayon de convergence, que l'on suppose non-nul. On considère l'application $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$ a pour rayon de convergence R et l'application F : $]-R, R[\to \mathbb{C}$ définie par $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$ est la primitive de f s'annulant en 0.

Démonstration. On applique le théorème précédent à F. □

► *Exemple.* Reprenons l'exemple de la série exponentielle traité au début de 6.2. Appliquons-lui le théorème ci-dessus, avec $R = +\infty$. L'application exponentielle, définie par $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots$ est de classe C^∞ sur $]-\infty, +\infty[$, et sa dérivée est :

$$(\mathrm{e}^x)' = 0 + 1 + 2\tfrac{x}{2} + 3\tfrac{x^2}{6} + 4\tfrac{x^3}{24} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} n \tfrac{1}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{n!} x^n = \mathrm{e}^x.$$

On retrouve le fait que : $\mathrm{e}^x = (\mathrm{e}^x)' = (\mathrm{e}^x)'' = \cdots = (\mathrm{e}^x)^{(n)} = \cdots$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

► *Exemple.* Reprenons l'exemple de la série $\sum x^n$ traité au début de 6.2. Appliquons-lui le théorème ci-dessus, avec $R = 1$. L'application $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$ est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$, et sa dérivée est : $\frac{1}{(1-x)^2} = (\frac{1}{1-x})' = 0 + 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$. On conclut que, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n, \quad \text{et par itération} \quad \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} x^n \ \text{ pour tout } k \geq 0.$$

Appliquons à cette même série $\sum x^n$ le corollaire ci-dessus avec $R = 1$. On déduit que :

$$-\ln(1 - x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{pour tout } x \in]-1, 1[.$$

6.2.3 Application aux équations différentielles

On cherche à déterminer, pour une équation différentielle donnée, s'il existe des solutions qui sont la somme d'une série entière sur un intervalle $]-R, R[$ de $\mathbb{R}$.

► *Exemple.* Considérons l'équation différentielle $4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) = 0$.

On cherche une solution $y(x)$ qui soit la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$. On a :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc } 4xy''(x) + 2y'(x) - y(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} 4n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{m=1}^{+\infty} 4(m+1)m a_{m+1} x^m + \sum_{m=0}^{+\infty} 2(m+1) a_{m+1} x^m - \sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m \\
&= (2a_1 - a_0) + \sum_{m=1}^{+\infty} [4(m+1)m a_{m+1} + 2(m+1)a_{m+1} - a_m] x^m.
\end{aligned}$$

Il en résulte que $y(x)$ est solution de l'équation différentielle de départ si et seulement si :

$$a_1 = \tfrac{1}{2} a_0 \quad \text{et} \quad a_{n+1} = \tfrac{1}{(2n+1)(2n+2)} a_n \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Imposons de plus la condition initiale $y(0) = 1$. Cela signifie que $a_0 = 1$. D'où l'on tire :

$$a_1 = \tfrac{1}{2}, \quad a_2 = \tfrac{1}{3\times 4} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4!}, \quad a_3 = \tfrac{1}{5\times 6} \times \tfrac{1}{4!} = \tfrac{1}{6!}, \quad \text{et par récurrence } a_n = \tfrac{1}{(2n)!}.$$

On conclut que $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^n$, dont le rayon de convergence est clairement $+\infty$.

Remarque. – On définit naturellement à partir de la série exponentielle les deux séries entières :

$$\mathrm{ch} z = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{et} \quad \cos z = \tfrac{1}{2}(\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n},$$

dont le rayon de convergence est $+\infty$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la solution $y(x)$ trouvée s'exprime comme :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{(2n)!} x^n = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{(2n)!} (\sqrt{x})^{2n} = \mathrm{ch}\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{(2n)!} (-(\sqrt{-x})^2)^n = \cos\sqrt{-x} & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Cette dernière remarque nous introduit à la question qui fait l'objet de la partie 6.3 ci-dessous : savoir si, réciproquement à ce qu'on vient de faire dans la partie 6.2, une fonction donnée est ou non la somme d'une série entière sur un certain intervalle.

6.3 Développement en séries entières

6.3.1 Fonction développable en série entière.

Définition. Soit f une fonction réelle d'une variable réelle x définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant 0. On dit que f est *développable en série entière centrée en* 0 lorsqu'il existe un intervalle $]-\alpha, \alpha[$ centré en 0 inclus dans I, et une série entière réelle $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geq \alpha$, tels que :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{pour tout } x \in]-\alpha, \alpha[.$$

► *Convention terminologique.* Dans toute la suite, “développable en série entière” signifiera “développable en série entière centrée en 0”.

Plus généralement, pour tout $a \in \mathbb{R}$, une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant a est dite développable en série entière centrée en a lorsque la fonction $x \mapsto f(x+a)$ est développable en série entière centrée en 0 ; c'est pourquoi on se ramène à l'étude du cas $a = 0$.

► *Exemples.* D'après ce qu'on a vu en 6.2, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est développable en série entière sur $]-\infty, +\infty[$, et la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-ax}$ est développable en série entière sur $\left]-\frac{1}{|a|}, \frac{1}{|a|}\right[$.

Proposition (*unicité du développement, parité, imparité*).
Soit f une fonction réelle d'une variable réelle x que l'on suppose développable en série entière. Notons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[$. Alors :

(i) Les coefficients a_n sont déterminés de façon unique.

(ii) f est paire sur $]-\alpha, \alpha[$ si et seulement si $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \geq 0$.

(iii) f est impaire sur $]-\alpha, \alpha[$ si et seulement si $a_{2p} = 0$ pour tout $p \geq 0$.

Démonstration. D'après le théorème 6.2.2 la fonction f est de classe C^∞ sur $]-\alpha, \alpha[$, et l'on a :

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad a_2 = \tfrac{1}{2} f''(0), \quad \ldots, \; a_n = \tfrac{1}{n!} f^{(n)}(0), \quad \ldots$$

ce qui prouve l'unicité des coefficients a_n. Pour (ii), la condition est clairement suffisante. Si l'on suppose réciproquement que f est paire, alors $f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[$. Comme $x \mapsto f(-x)$ est la fonction définie par la somme de la série entière $\sum (-1)^n a_n x^n$, il résulte du point (i) que $a_n = (-1)^n a_n$ pour tout $n \geq 0$, d'où $a_n = 0$ lorsque n est impair. La preuve du point (iii) est identique. □

► *Remarque : conditions d'existence d'un développement en série entière.* Il résulte du théorème 6.2.2 que toute fonction développable en série entière sur un intervalle $]-\alpha, \alpha[$ est de classe C^∞ sur cet intervalle. Mais la réciproque peut être fausse (il existe des fonctions de classe C^∞ qui ne sont pas développables en série entière[2]. D'où l'intérêt de pouvoir mettre en évidence des conditions suffisantes pour l'existence d'un développement en série entière, comme dans le lemme suivant (avec en l'ocurrence des conditions nécessaires et suffisantes) :

Lemme. *Soit $f :]-\alpha, \alpha[\to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Soit $R_n(x) = \int_0^x \frac{1}{n!}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$ le reste à l'ordre n dans la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à f (cf. 2.2.4). Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est développable en série entière ;*

(ii) *il existe $0 < \beta \leq \alpha$ tel que $\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$ pour tout $x \in]-\beta, \beta[$;*

2. *Contre-exemple.* Prenons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. L'application f est de classe C^∞ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x)$ est de la forme $\frac{P_n(x)}{x^{3n}} \mathrm{e}^{-1/x^2}$, d'où par application du théorème limite de la dérivée, on déduit que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, avec $f^{(n)}(0) = 0$. Dès lors, si f était développable en série entière, il existerait $\alpha > 0$ tel que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n = 0$ pour tout $x \in]-\alpha, \alpha[$, ce qui n'est pas vrai puisque f ne s'annule qu'en 0.

(iii) *il existe* $0 < \gamma \leq \alpha$, $A > 0$, $C > 0$ *tels que* $|f^{(n)}(x)| \leq CA^n n!$ *pour tous* $x \in \,]-\gamma, \gamma[$ *et* $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout $x \in \,]-\alpha, \alpha[$ on a d'après 2.2.4 :

$$f(x) = f(0)+f'(0)x+\tfrac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\tfrac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k+R_n(x).$$

Supposons que l'on a (iii). Pour tous $x \in \,]-\gamma, \gamma[$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \left|\int_0^x \tfrac{1}{n!}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt\right| \leq \int_0^x \left|\tfrac{1}{n!}(x-t)^n\right| |f^{(n+1)}(t)|\,dt \\ &\leq CA^{n+1}(n+1)! \left|\int_0^x \tfrac{1}{n!}(x-t)^n\right| = CA^{n+1}|x|^{n+1} \end{aligned}$$

Posons $\beta = \min(\gamma, \frac{1}{A})$. Pour tout $x \in \,]-\beta, \beta[$, on a $|Ax| < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$. Ce qui prouve (ii).

Supposons que l'on a (ii). Pour tout $x \in \,]-\beta, \beta[$, on a $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k = f(x)-R_n(x)$. Comme $\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k = f(x)$, ce qui prouve que la série entière $\sum \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)x^k$ est de rayon de convergence $R \geq \beta > 0$, et donc que f est développable en série entière.

La dernière implication est laissée au lecteur en exercice. □

► *Méthodes de calcul.* Un raisonnement "théorique" (entre autres celui du lemme précédent) permet d'établir l'existence d'un développement en série entière pour certaines fonctions de références (exponentielle, puissances,...), puis on se ramène à ces fonctions de références en utilisant les propriétés suivantes (dont les énoncés explicites et les preuves seront vus en exercices) :

1. la somme de deux fonctions f et g développables en série entière est développable en série entière, et le développement de $f+g$ s'obtient en faisant la somme des deux développements ;
2. idem pour le produit fg ;
3. la dérivée d'une fonction f développable en série entière est développable en série entière, et le développement de f' s'obtient en dérivant terme à terme le développement de f ;
4. idem pour une primitive.

6.3.2 Exemples classiques.

► *Première série d'exemples.* Le résultat central (que l'on a déjà démontré en 6.2) est que la fonction exponentielle est développable en série entière, avec un rayon de convergence infini :

$$\boxed{\mathrm{e}^x = \exp x = \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{n!}x^n = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4 + \cdots \qquad \text{pour tout } x \in \,]-\infty, +\infty[}$$

Les fonctions hyperboliques étant définies par $\mathrm{ch}x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ et $\mathrm{sh}x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$, les résultats sur les sommes de fonctions développables en séries entières donnent :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{ch}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + \cdots & \text{pour tout } x \in \left]-\infty, +\infty\right[\\ \mathrm{sh}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{5040}x^7 + \cdots & \text{pour tout } x \in \left]-\infty, +\infty\right[\end{array}}$$

De même pour les fonctions trigonométriques $\cos x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix})$ et $\sin x = \frac{1}{2i}(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix})$:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \cdots & \text{pour tout } x \in \left]-\infty, +\infty\right[\\ \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \cdots & \text{pour tout } x \in \left]-\infty, +\infty\right[\end{array}}$$

► *Seconde série d'exemples.* Un autre résultat fondamental est que la fonction puissance $(1+x)^\alpha$ est développable en série entière pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, avec un rayon de convergence égal à 1 (infini dans le cas particulier où $\alpha \in \mathbb{N}$ comme on l'a vu en 6.2) :

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \quad \text{pour tout } x \in \left]-1, 1\right[}$$

Preuve. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons $a_0 = 1$ et $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$ pour tout $n \geq 1$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = 1$. La série entière $\sum a_n z^n$ a donc 1 pour rayon de convergence, et l'on peut considérer la fonction $f_\alpha : \left]-1, 1\right[\to \mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On a alors $f'_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ pour tout $\left]-1, 1\right[\to \mathbb{R}$. Un calcul simple montre alors :

$$(1+x)f'_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left((n+1)a_{n+1} + n a_n\right)}_{=\alpha a_n} x^n = \alpha f_\alpha(x).$$

Mais on sait par ailleurs que les solutions de l'équation différentielle $(1+x)y' - \alpha y = 0$ linéaire du premier ordre sont les applications de la forme $y(x) = \lambda \mathrm{e}^{\alpha \ln(1+x)} = \lambda(1+x)^\alpha$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f_\alpha(x) = \lambda(1+x)^\alpha$ pour tout $x \in \left]-1, 1\right[$. Comme $f_\alpha(0) = a_0 = 1$, on a $\lambda = 1$, ce qui achève la preuve. □

Pour $\alpha = -1$, on retrouve $\boxed{\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \quad \text{pour tout } x \in \left]-1, 1\right[}$,

et donc en changeant x et $-x$, la formule $\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{pour tout } x \in \left]-1, 1\right[}$.

En prenant leurs primitives s'annulant en 0, il vient

$$\boxed{\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n \quad \text{et} \quad -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n \quad \text{pour tout } x \in \left]-1, 1\right[},$$

dont la demi-somme conduit à $\boxed{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} \quad \text{pour tout } x \in \left]-1, 1\right[}$.

En remplaçant x par x^2 dans $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ et en prenant la primitive s'annulant en 0, on obtient :

$$\boxed{\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \qquad \text{pour tout } x \in]-1,1[}\ .$$

Reprenons maintenant la formule de départ avec $\alpha = -\frac{1}{2}$; il vient :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n} x^n \qquad \text{pour tout } x \in]-1,1[}\ .$$

En remplaçant x par $-x^2$ et en prenant la primitive s'annulant en 0, on obtient :

$$\boxed{\arcsin x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n} \, \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \qquad \text{pour tout } x \in]-1,1[}\ .$$

Chapitre 7

Séries de fonctions (un aperçu)

Conformément à ce que prévoit le programme de ce cours, ce chapitre a pour but de donner un aperçu sommaire[1] sur la notion de série de fonctions, dont les séries entières du chapitre précédent sont un exemple particulier. Il ne s'agit que d'une première approche du sujet, qui sera repris de façon plus approfondie dans des enseignements ultérieurs.

7.1 Convergence des séries de fonctions

7.1.1 Convergence simple et convergence absolue

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. On se donne pour tout $n \in \mathbb{N}$ une application $f_n : X \to \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut considérer le réel $f_n(x)$.

Pour $x \in X$ quelconque fixé, on peut donc considérer la série numérique $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$.

Si x est un élément de X tel que cette série converge, on peut considérer sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, qui est un réel dépendant de x ; notons $S(x)$ ce réel.

Si pour tout $x \in X$ cette série converge, cela définit une application S de X dans $\mathbb{R}$, qui à tout $x \in \mathbb{R}$, associe le réel $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Définition. Soient X une partie de $\mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction $f_n : X \to \mathbb{R}$.
On dit que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ *converge simplement sur* X si, pour tout $x \in X$, la série numérique $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge dans $\mathbb{R}$.
Dans ce cas, on appelle *somme de la série de fonctions* $\sum_{n \geq 0} f_n$ l'application $S : X \to \mathbb{R}$ définie par :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \quad \text{pour tout } x \in X$$

► *Remarque.* Les séries entières réelles sont des exemples de séries de fonctions, correspondant au cas particulier où $f_n(x)$ est un monôme, c'est-à-dire est de forme $f_n(x) = a_n x^n$ avec $a_n \in \mathbb{R}$.

1. sans généralités sur les suites de fonctions, sans recours à la convergence uniforme, seulement pour des fonctions d'une variable réelle, sans développement sur les séries de Fourier...

▶ *Exemple.* On considère pour tout $n \geq 1$ la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$, et la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$. Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque fixé.

- ✓ Si $x < 0$, $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} = +\infty$, donc la série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est grossièrement divergente. De même si $x = 0$, $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} = 1$, la série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est grossièrement divergente. On conclut que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ ne converge pas simplement sur $]-\infty, 0]$.

- ✓ Si $x > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{2\ln n - x\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{(2\frac{\ln n}{\sqrt{n}} - x)\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} = 0$.
  Par comparaison avec la série de Riemann de de terme général $\frac{1}{n^2}$, on déduit que la série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est convergente. On conclut que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

▶ *Remarque.* On peut aussi considérer plus spécifiquement les éléments x de X tels que la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est absolument convergente, ce qui conduit à la définition suivante.

Définition. Soient X une partie de $\mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction $f_n : X \to \mathbb{R}$.

On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge absolument sur* X si la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} |f_n|$ est simplement convergente sur X,

ce qui signifie en d'autres termes que la série numérique $\sum_{n\geq 0} |f_n(x)|$ converge pour tout $x \in X$.

Il est évident que si la série de fonctions $\sum_{n\geq 0}$ converge absolument sur X, alors elle converge simplement sur X (en effet la convergence de la série numérique $\sum_{n\geq 0} |f_n(x)|$ implique celle de la série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$, et ceci pour tout $x \in X$).

7.1.2 Convergence normale

Définition. Soient X une partie de $\mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction $f_n : X \to \mathbb{R}$.

On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge normalement sur* X s'il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de réels positifs telle que :

$$\Big[\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in X,\ |f_n(x)| \leq a_n\ \Big] \quad \text{et} \quad \Big[\text{la série numérique } \sum_{n\geq 0} a_n \text{ est convergente}\Big].$$

▶ *Remarque importante.* Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ une série de fonctions qui converge normalement sur X.

Il résulte de la première condition de la définition ci-dessus que chaque fonction f_n est bornée sur X et que, en notant $\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in X} |f_n(x)|$, on a $\|f_n\|_\infty \leq a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La seconde condition de la définition ci-dessus implique alors par majoration que la série numérique $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty$ est convergente.

Proposition. Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Si une série de fonctions converge normalement sur X, alors elle converge absolument sur X, et donc elle converge simplement sur X.

Pour résumer de façon schématique :

$$\boxed{\text{convergence normale}} \Rightarrow \boxed{\text{convergence absolue}} \Rightarrow \boxed{\text{convergence simple}}$$

Démonstration. On considère une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ normalement convergente sur X. Il existe une série numérique à termes positifs $\sum_{n\geq 0} a_n$ qui est convergente et telle que $|f_n(x)| \leq a_n$ pour tout $x \in X$. En appliquant la règle de majoration sur les séries numériques à termes positifs, on en déduit que la série $\sum_{n\geq 0} |f_n(x)|$ converge pour tout $x \in X$, ce qui prouve le résultat voulu. $\square$

► *Exemples.*

1. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^2+x^2}$ de la variable $x \in \mathbb{R}$.

   Posons $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2+x^2}$. Pour tout x $\in \mathbb{R}$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Donc $|f_n(x)|$ est majoré pour tout $x \in \mathbb{R}$ par le terme général $\frac{1}{n^2}$ d'une série numérique convergente (série de Riemman avec $\alpha = 2 > 1$) indépendante de x. On conclut que la série de fonctions $\sum f_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Elle est donc aussi absolument et simplement convergente sur X.

2. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+x}$ de la variable $x \in [0, +\infty[$.

   Posons $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$. Pour tout $x \geq 0$ fixé, on a $|f_n(x)| = \frac{1}{n+x}$ pour tout $n \geq 0$, qui est le terme général d'une série numérique divergente (car équivalent pour n au voisinage de l'infini au terme général $\frac{1}{n}$ de la série harmonique). Ceci traduit le fait que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas absolument sur $[0, +\infty[$; et donc ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.

   Pour tout $x \geq 0$ fixé, on a $f_n(x) = (-1)^n \alpha_n$ pour tout $n \geq 0$ avec la notation $\alpha_n = \frac{1}{n+x}$. Comme la suite de réels positifs (α_n) décroît en convergeant vers 0, on peut appliquer la règle des séries alternées et en déduire que la série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente. Ceci traduit le fait que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

3. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x})$ de la variable $x \in [0, +\infty[$.

   Posons $f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$. Pour tout $x \geq 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, $f_n(x) \geq 0$ et $f_n(x) = \frac{x}{n(n+x)}$. Ainsi, pour un $x \geq 0$ fixé quelconque, $f_n(x) \sim \frac{x}{n^2}$ pour n au voisinage de l'infini. Donc, pour tout $x \geq 0$ fixé, la série numérique $\sum f_n(x)$ est convergente. Ceci traduit le fait que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$. A noter qu'elle converge aussi absolument puisqu'ici $f_n(x) \geq 0$).

   En vue d'étudier la convergence normale, on étudie les variations de f_n. C'est une fonction croissante sur $[0, +\infty[$, avec $f_n(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \frac{1}{n}$. Donc $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$, ce qui prouve que les f_n sont bornées, mais que la série $\sum \|f_n\|_\infty$ est divergente (série harmonique). On conclut donc que la série de fonctions $\sum f_n$ n'est pas normalement convergente sur $[0, +\infty[$.

   Considérons maintenant, pour tout réel $a \geq 0$, l'intervalle $[0, a]$. Si l'on restreint les f_n à $[0, a]$, on a $\sup_{x\in[0,a]} |f_n(x)| = \frac{a}{n^2+na}$, qui est le terme général d'une série numérique convergente (car $\frac{a}{n^2+na} \sim \frac{a}{n^2}$ pour n au voisinage de l'infini). On conclut donc (en utilisant la remarque suivant la définition 7.1.2) que la série de fonctions $\sum f_n$ est normalement convergente sur tout intervalle $[0, a]$ avec $a \geq 0$.

7.2 Fonctions définies par la somme d'une série de fonctions

7.2.1 Continuité

Si une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge, on s'intéresse naturellement à certaines propriété de la fonction somme S. Est-elle continue ? dérivable ? Les réponses, on va le voir, font intervenir non seulement les propriétés des fonctions f_n (continuité, dérivabilité,...) mais aussi le type de convergence de la série. Le résultat principal dans le cadre de ce cours est le théorème suivant, qui donne une condition suffisante de continuité de S.

Théorème. Soient X une partie de $\mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction $f_n : X \to \mathbb{R}$. On suppose que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge *normalement* sur X, et on note $S : X \to \mathbb{R}$ la fonction somme de cette série, qui est définie par $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ pour tout $x \in X$.

(i) Si chaque fonction f_n est continue en un même point x_0 de X, alors S est continue en x_0.

(ii) Si chaque fonction f_n est continue sur X, alors S est continue sur X.

Démonstration. L'hypothèse de convergence normale sur X implique qu'il existe une suite de réels positifs $(a_k)_{k\geq 0}$ telle que $|f_k(x)| \leq a_k$ pour tout $x \in X$ et tout $k \in \mathbb{N}$, et telle que la série numérique $\sum_{k\geq 0} a_k$ converge. Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$. On a

$$\text{pour tout } x \in X,\ \ |S(x) - S_n(x)| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k := \mu_n,$$

où la convergence de la série $\sum_{k\geq 0} a_k$ se traduit par $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n = 0$.

Soit $x_0 \in X$ quelconque fixé.Comme chaque fonction f_k est supposée continue en x_0, il est clair que chaque fonction S_n est continue en x_0 (somme d'un nombre fini de fonctions continues). Fixons un réel $\varepsilon > 0$ quelconque. Puisque la suite $(\mu_n)_{n\geq 0}$ converge vers 0, il résulte de la majoration ci-dessus qu'il existe un entier $N \geq 0$ tel que :

$$\forall\ n \geq N,\ \forall\ x \in X,\ \ |S(x) - S_n(x)| \leq \mu_n < \varepsilon.$$

Pour un tel entier $n \geq N$, la continuité de S_n en x_0 se traduit (pour le réel $\varepsilon > 0$ considéré) par l'existence d'un réel $\eta > 0$ tel que :

$$\forall\ x \in X,\ \ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |S_n(x) - S_n(x_0)| < \varepsilon.$$

Pour un tel $x \in X$ vérifiant $|x-x_0| < \eta$, on a donc en combinant les deux assertions et en utilisant l'inégalité triangulaire : $|S(x)-S(x_0)| \leq |S(x)-S_n(x)|+|S_n(x)-S_n(x_0)|+|S_n(x_0)-S(x_0)| < 3\varepsilon$, ce qui prouve que f est continue en x_0. Le point (i) étant ainsi démontré, le point (ii) s'en déduit évidemment. □

► *Exemple.* On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{-nx^2}}{(n+1)^3}$ de la variable $x \in \mathbb{R}$.

Posons $f_n(x) = \frac{(-1)^n \mathrm{e}^{-nx^2}}{(n+1)^3}$. On a $\mathrm{e}^{-nx^2} \leq 1$, donc $|f_n(x)| = \frac{\mathrm{e}^{-nx^2}}{(n+1)^3} \leq \frac{1}{(n+1)^3} \leq \frac{1}{n^3}$. Comme $\frac{1}{n^3}$ est le terme général d'une série convergente (série de Riemann) qui ne dépend que de n (pas de x), ceci prouve que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Soit S fonction somme de cette série de fonctions, définie donc par $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{-nx^2}}{(n+1)^3}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Puisque chaque f_n est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème ci-dessus permet de conclure que la fonction S est aussi continue sur $\mathbb{R}$.

► *Une remarque méthodologique importante.* Considérons le théorème ci-dessus en supposant que X est un intervalle I (quelconque, ouvert ou fermé, borné ou non) . Même si la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ n'est pas normalement convergente sur I, il suffit qu'elle soit normalement convergente sur tout intervalle $[a,b]$ inclus dans I pour assurer la continuité sur I de la fonction somme $S = \sum_{n\geq 0} f_n$.

En effet, pour tout réel x_0 de I, il existe $a < b$ tels que $x_0 \in [a,b] \subset I$; en appliquant le théorème sur l'intervalle $[a,b]$, on conclut que S est continue sur $[a,b]$, et donc en particulier en x_0. Comme ceci est vrai pour tout $x_0 \in I$, on conclut bien que S est continue sur I.

On verra dans les exercices 7.3 des exemples d'application de ce principe.

7.2.2 Intégration et dérivation

Les deux théorèmes suivants sont admis dans le cadre de ce cours.

Théorème. Soient $I = [a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ avec $a \leq b$ des réels fixés et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction $f_n : I \to \mathbb{R}$. On suppose que chaque f_n est continue sur I et que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge *normalement* sur I.
Alors la série de réels $\sum_{n\geq 0} \left(\int_a^b f_n(t)\,dt\right)$ converge, et l'on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)\,dt\right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt.$$

Dans cet énoncé, le second terme de l'égalité est bien défini puisque, d'après le théorème de continuité démontré précédemment, la fonction somme S définie par $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur I, de sorte que l'intégrale $\int_a^b S(t)\,dt$ est bien définie.

► *Exemple.* On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} \frac{2x}{n^2-x^2}$ de la variable $x \in [0,1]$.
Posons $f_n(x) = \frac{2x}{n^2-x^2}$. On a :

$$\text{quel que soit } x \in [0,1],\ |f_n(x)| = \tfrac{2x}{n^2-x^2} \leq \tfrac{2}{n^2-x^2} \leq \tfrac{2}{n^2-1}.$$

Comme $\frac{1}{n^2-1}$ est le terme général d'une série numérique convergente (équivalente à une série de Riemann) qui ne dépend que de n (pas de x), ceci prouve que la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[0,1]$. Puisque chaque f_n est continue sur $[0,1]$, le théorème précédent permet de conclure que la fonction S définie comme la somme de cette série est aussi continue sur $[0,1]$, et que l'on a :

$$J = \int_0^1 S(x)\,dx = \int_0^1 \big(\sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)\big)\,dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \big(\int_0^1 f_n(x)\,dx\big) = \sum_{n=2}^{+\infty} J_n,$$

avec :

$$J_n = \int_0^1 \tfrac{2x}{n^2-x^2}\,dx = \int_0^1 (\tfrac{1}{n-x} - \tfrac{1}{n+x})\,dx = [-\ln(n-x) - \ln(n+x)]_0^1 = \ln\tfrac{n}{n-1} - \ln\tfrac{n+1}{n}.$$

Alors, pour tout $N \geq 2$, on a :

$\sum_{n=2}^{N} J_n = \sum_{n=2}^{N} (\ln\frac{n}{n-1} - \ln\frac{n+1}{n}) = \ln 2 - \ln\frac{N+1}{N}$, qui tend vers $\ln 2$ quand N tend vers l'infini.

On conclut que :

$$\int_0^1 \big(\sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)\big)\,dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \big(\int_0^1 f_n(x)\,dx\big) = \ln 2.$$

Théorème. Soient I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ (non vide, non réduit à un point) et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une fonction $f_n : I \to \mathbb{R}$. On suppose que chaque f_n est de classe C^1 sur I, que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur I, et que la série $\sum_{n\geq 0} f_n'$ converge normalement sur tout segment $[a, b]$ inclus dans I.

Alors l'application somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur I, et l'on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

Il importe de noter que, dans cet énoncé, c'est la convergence normale de la série des dérivées f_n' qui intervient dans les hypothèses, et non celle de la série des fonctions f_n elles-mêmes.

► *Exemple.* On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{x^2+n^2}$ de la variable $x \in \mathbb{R}$.

Posons $f_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}$. Il est clair que pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque fixé, la série numérique $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge (équivalente à une série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$). Ceci prouve la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction que l'on note S.

Chaque f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f_n'(x) = \frac{-2x}{(x^2+n^2)^2}$. Si l'on fixe un réel $a > 0$ et que l'on considère l'intervalle $[-a, a]$, on a :

$$\text{quel que soit } x \in [-a, a], \ \ |f_n'(x)| = \frac{2|x|}{(x^2+n^2)^2} \leq \frac{2|x|}{n^4} \leq \frac{2a}{n^4}.$$

Comme $\frac{a}{n^4}$ est le terme général d'une série numérique convergente (série de Riemann) qui ne dépend que de n (pas de x), ceci prouve que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement sur $[-a, a]$. Comme pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque on peut toujours trouver $a > 0$ tel que $x \in [-a, a]$, on déduit du théorème précédent que S est dérivable sur $[-a, a]$, donc en x, et vérifie :

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}\right)' = S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+n^2)^2}.$$

7.2.3 Retour sur le cas particulier des séries entières

On a déjà vu page 75 que les séries entières étudiées au chapitre précédent sont un cas particulier de séries de fonctions, celui où f_n est du type $f_n(x) = a_n x^n$ pour une suite réelle $(a_n)_{n\geq 0}$ fixée de cœfficients. On précise ici leur mode de convergence.

Lemme fondamental. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière réelle. Soit $R \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ son rayon de convergence. Alors, pour tout réel r tel que $0 \leq r < R$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est normalement convergente sur le segment $[-r, r]$.

Démonstration. Posons $f_n(x) = a_n x^n$ pour tout $x \in \,]-R, R[$. On sait que, d'après le théorème fondamental 6.1.2, la série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge absolument pour tout $x \in \,]-R, R[$.

Soit alors r un réel positif tel que $r < R$. En appliquant ce qui précède à $r \in \,]-R, R[$, la série numérique de terme général positif $|a_n|\, r^n$ est convergente. Or tout $x \in [-r, r]$, on a la majoration $|f_n(x)| = |a_n x^n| \leq |a_n|\, |x|^n \leq |a_n|\, r^n$, ce qui prouve que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ est normalement convergente sur le segment $[-r, r]$. □

Corollaire. Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Soit S la fonction somme de cette série entière, définie sur $]-R, R[$ par $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
Alors S est continue sur $]-R, R[$.

Démonstration. Soit $x_0 \in]-R, R[$ quelconque fixé. Il existe $r \in]-R, R[$ tel que $0 \leq |x_0| \leq r < R$. Comme il est clair que la fonction $f_n : x \mapsto a_n x^n$ est continue sur $[-r, r]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et comme la série de fonction $\sum f_n$ est normalement convergente sur $[-r, r]$ d'après le lemme précédent, on déduit du théorème 7.2.1 que la fonction S est continue sur le segment $[-r, r]$. En particulier S est continue en x_0. Et ceci étant vrai quel que soit $x_0 \in]-R, R[$, on conclut que S est continue sur $]-R, R[$. □

► *Remarque.*

(i) On retrouve ainsi comme une conséquence immédiate du théorème général 7.2.1 le résultat que l'on avait démontré par une preuve directe à la proposition 6.2.1 du chapitre sur les séries entières.

(ii) On peut de la même façon déduire immédiatement le théorème de dérivabilité 6.2.2 des séries entières comme un corollaire évident du théorème de dérivabilité des séries de fonctions vu ci-dessus en 7.2.2.

► *Exemple.* On considère la série entière $\sum\limits_{n\geq 2} a_n x^n$ avec $a_n = \frac{(-1)^n}{n(n-1)}$.

✓ Il est clair que le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est $R = 1$. Donc l'application définie par $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n$ est a priori définie sur $]-1, 1[$, et on sait d'après la proposition 6.2.1 ou le corollaire ci-dessus que f est continue $]-1, 1[$.

✓ De plus on a pour tout $x \in [-1, 1]$ la majoration $|a_n x^n| \leq |a_n| \leq \frac{1}{n^2}$, avec $\sum \frac{1}{n^2}$ convergente, ce qui montre que la série $\sum a_n x^n$ est normalement convergente sur $[-1, 1]$. Il en résulte en particulier que f est continue sur $[-1, 1]$.

✓ On sait d'après le théorème 6.2.2 que f est dérivable sur $]-1, 1[$ avec pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x).$$

Les primitives de $\ln(1+x)$ sont de la forme $(1+x)\ln(1+x) - x + K$ avec $K \in \mathbb{R}$. Comme f est parmi ces primitive celle qui s'annule en 0 (puisque $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \cdots$), on doit avoir $K = 0$. On conclut que :

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n = (x+1)\ln(1+x) - x \quad \text{pour tout } x \in]-1, 1[.$$

✓ On a montré ci-dessus que f est continue sur $[-1, 1]$; la continuité en 1 et en -1 permet de calculer la somme des séries numériques suivantes :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} = f(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x+1)\ln(1+x) - x = 2\ln 2 - 1$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = f(-1) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} (x+1)\ln(1+x) - x = -(-1) = 1$$

7.3 Exercices

Exercice 1. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

a) Cette série converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}_+$? normalement sur $\mathbb{R}_+$?

b) Mêmes questions sur $[0, 1]$.

c) Mêmes questions sur $[0, a]$ avec $0 < a < 1$ fixé.

Exercice 2. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} g_n$ avec $g_n(x) = \frac{x^2}{x^3+4n^3}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

a) Montrer que cette série converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

b) Pour tout $n \geq 1$, calculer $\|g_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |g_n(x)|$. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} g_n$ n'est pas normalement convergente sur $\mathbb{R}_+$.

c) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} g_n$ est normalement convergente sur tout intervalle de la forme $[0, a]$ avec $a > 0$.

Exercice 3. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On appelle f la fonction définie somme de cette série, c'est-à-dire la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
La convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}$? est-elle absolue sur $\mathbb{R}$?

b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et exprimer f' comme la somme d'une série de fonctions.

d) Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :

$$\int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}\right) dx = 2\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}\right) dx = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}.$$

Exercice 4. On considère la série de fonctions d'une variable réelle : $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \mathrm{e}^{-nx} x^{2n}$.

a) Montrer que la fonction f définie par la somme de cette série est continue sur $[0, +\infty[$; on énoncera avec précision le théorème utilisé.

b) Montrer de façon comparable que la fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$; on énoncera avec précision le théorème utilisé.

c) Soit $x \in [0, +\infty[$. Donner une expression de $f'(x)$ à l'aide de fonctions usuelles (on pourra introduire dans l'expression de $f'(x)$ comme série la série géométrique de raison $-x^2\mathrm{e}^{-x}$).

d) En déduire une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles pour tout $x \in [0, +\infty[$.

Exercice 5. Soit $X = [0, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in X$ on pose : $f_n(x) = nx^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.
On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$. Justifier avec soin les affirmations suivantes :

a) $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur X.

b) $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur X. [*Indication :* on pourra calculer $\|f_n\|_\infty$].

c) $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$, où $a > 0$.

Exercice 6. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ où $f_n(x) = \frac{1}{n}x^n \sin(nx)$.

a) Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $X =]-1,1[$. On appelle f la fonction somme de cette série, c'est-à-dire $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

b) Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge normalement sur $X_a = [-a,a]$ pour tout $a \in]0,1[$.

c) Montrer que f est dérivable sur X et exprimer f' comme la somme d'une série de fonctions.

d) En déduire que, pour tout $x \in X$, on a $f'(x) = \frac{\sin x + x\cos x - x^2}{x^2 - 2x\cos x + 1}$.
[*Indication :* on pourra passer à une écriture complexe utilisant $\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i\sin x$)).

e) En déduire que, pour tout $x \in X$, on a $f(x) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{x\sin x}{1 - x\cos x}\right)$.

Exercice 7. On note $I = [0,+\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : I \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}.$$

a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge au moins simplement sur I vers une fonction S ; on précisera si la convergence est absolue et/ou normale sur I.

b) Montrer que S est continue sur I.

c)Montrer que S est dérivable sur $[a,+\infty[$ pour tout réel $a > 0$.

d) En déduire que S est dérivable sur $]0,+\infty[$ et exprimer la dérivée S' comme la somme d'une série de fonctions.